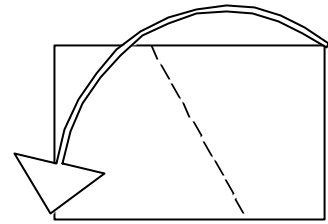
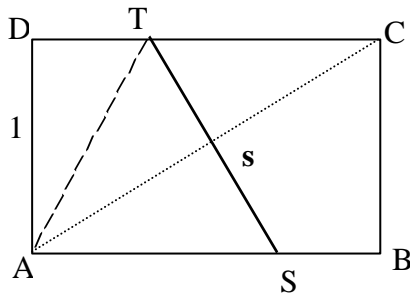


Faltungen am Rechteck

Die 'Faltlinie' s entsteht beim Falten eines Rechteckes im DIN-A-Format ($1 : \sqrt{2}$ -Rechteck), wenn die rechte obere Ecke des Blattes auf die linke untere Ecke gelegt wird.

- Skizziere das gefaltete Rechteck



- Steht die Strecke s senkrecht auf der Diagonalen ?
- Was kann man über das Dreieck AST aussagen?
- Wie lang ist die Strecke TC ? Wie lang ist die Strecke s ?
- In welchem Verhältnis teilt der 'Knickpunkt' T die Rechteckseite?
- Untersuche das Viereck ASCT und bestimme seinen Flächeninhalt.

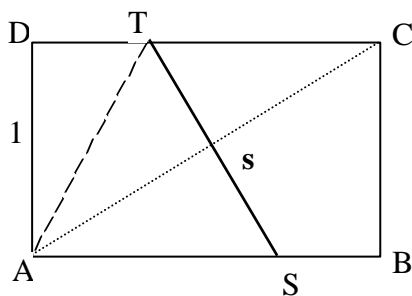
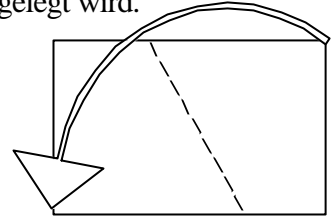
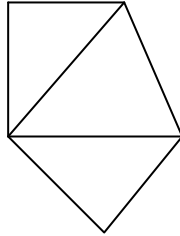
Untersuche Sonderfälle , Variationen , Verallgemeinerungen zu den Fragestellungen.

- Wie lassen sich die Antworten bei anderen Rechtecksformen (z.B. 1:2-Rechteck; Quadrat; Rechteck mit den Seitenlängen a und $k \cdot a$, bzw. mit 1 und k) verallgemeinern?
- Welchen Flächeninhalt hat die entstandene Faltfigur (ein 'Fünfeck') für $k \neq 1$?
Zeige , dass ihr Flächenanteil zwischen 50% und 75% der Rechtecksfläche liegt.
Für welches Seitenverhältnis k hat das Fünfeck 3 gleich lange Seiten?
- Wie lässt sich die Faltlinie zeichnerisch konstruieren, wenn die rechte obere Ecke auf einen beliebigen Punkt P der gegenüberliegenden Kante AD gefaltet wird?
- Untersuche in einem beliebigen Rechteck den Fall, dass die 'Faltlinie' orthogonal zur Diagonalen ist und durch die rechte untere Ecke B geht. Sie teilt DC im Punkt L. Bestimme die Länge $|LC|$.
- Wie teilt dieses Lot BL von einer Ecke auf die Diagonale die Diagonale AC im Punkt Q auf? Bestimme die Streckenlänge $|QB|$
- Zeige: Die Länge von TC ist das arithmetische Mittel aus den Längen $|DC|$ und $|LC|$. Bestimme damit erneut die Länge der Strecke TC.
- Bestimme den Kosinus des Schnittwinkels der kreuzenden Faltlinien, wenn von rechts oben nach links unten und umgekehrt gefaltet wird.
- Wie kann man durch Faltung nachweisen, ob ein Rechteck mit $1:\sqrt{3}$ vorliegt?
- In welchem Rechteck ist das Dreieck AST gleichseitig?
Wie kann man beim DIN-A-Format gleichseitige Dreiecke falten?

Faltungen am Rechteck - Lösungshinweise

Die 'Schräglinie' s entsteht beim Falten eines Rechteckes im DIN-A-Format, indem die rechte obere Ecke des Blattes auf die linke untere Ecke gelegt wird.

- Skizziere das gefaltete Rechteck



Mit den Rechteckseitenlängen 1 und k gilt:

- Steht die Strecke s senkrecht auf der Diagonalen?
Ja; z.B. Die Seitenhalbierende im gleichschenkligen Dreieck ATC ist auch Höhe.
- Was kann man über das Dreieck AST aussagen?
Es ist gleichschenkelig

- Wie lang ist die Strecke TC ?

$$|TC| = 0.5 \cdot \left(k + \frac{1}{k}\right); \text{ mit den Seiten } a \text{ und } b \text{ gilt: } |TC| = \frac{a^2 + b^2}{2b}; \text{ DIN-A-Format: } 0.75 \sqrt{2}$$

- Wie lang ist die Strecke s ?

$$s = \frac{d}{k} = \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{k}; \text{ DIN-A-Format } \sqrt{3/2}$$

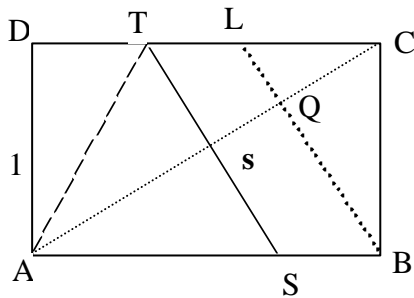
- In welchem Verhältnis teilt der 'Knickpunkt' T die Rechteckseite?

$$\frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}; \quad \text{DIN-A-Format } 1:3$$

- Untersuche das Viereck ASCT und bestimme seinen Flächeninhalt.

$$\text{Die Raute ASCT hat den Inhalt: } 0.5 \cdot \left(k + \frac{1}{k}\right)$$

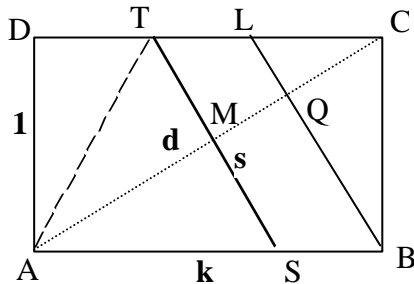
Untersuche Sonderfälle , Variationen , Verallgemeinerungen - Lösungshinweise



- Wie lassen sich die Antworten bei anderen Rechtecksformen (z.B. 1:2-Rechteck, Quadrat; Seitenlängen a und $k \cdot a$ bzw. mit 1 und k) verallgemeinern?
Im 1:2 - Rechteck ist die Faltlinie halb so lang wie die Diagonale; im Quadrat ist es die Diagonale; im $1: \sqrt{3}$ -Rechteck hat sie $2/3$ der langen Seite und ist doppelt so lang wie die Strecke LC .
- Welchen Flächeninhalt hat die entstandene Faltfigur (ein Fünfeck) für $k \neq 1$?
*Zeige , dass ihr Flächenanteil zwischen 50% und 75% der Rechtecksfläche liegt.
 Flächeninhaltsformel: $0.25 (3k - 1/k)$; Anteil $0.25 (3 - 1/k^2)$
 Fünfeck mit 3 gleichen Seiten: $s = TC$ ergibt $k = \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}$*
- Wie lässt sich die Faltlinie zeichnerisch konstruieren, wenn die rechte obere Ecke auf einen beliebigen Punkt P der gegenüberliegenden Kante AD gefaltet wird?
Die Mittelsenkrechte zu PC schneidet in T
- Untersuche den Fall, dass die Faltlinie orthogonal zur Diagonalen ist und durch die rechte untere Ecke geht. Sie teilt die Seite DC in L . Bestimme die Länge $|LC|$.
*Es entsteht die Länge $|LC| = 1/k$; Begründung über ähnliche Dreiecke;
 im Sonderfall DIN-Format entsteht die Seitenmitte , da $1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$*
- Wie teilt dieses Lot BL von einer Ecke auf die Diagonale die Diagonale AC im Punkt Q auf? Bestimme die Streckenlänge $|QB|$
 *Q teilt die Diagonale im Verhältnis $1:k^2$; (DIN-Format Aufteilung 1:2)
 Die Strecke QB hat die Länge $1/s$, d.h. $|QB| = k/d$ (durch Zerlegung des Rechtecks sieht man: QB ist 2. Seite des flächengleichen Rechtecks über der Diagonalen)*
- Zeige: Die Länge von TC ist das arithmetische Mittel aus den Längen $|DC|$ und $|LC|$. Bestimme damit erneut die Länge der Strecke TC .
 $|TC|$ ist das arithmetische Mittel aus k und $1/k$.
- Bestimme den Kosinus des Schnittwinkels der kreuzenden Faltlinien, wenn von rechts oben nach links unten und umgekehrt gefaltet wird.
 $\cos \alpha = (k^2 - 1)/(k^2 + 1)$; die kreuzenden Faltlinien schneiden aus AB eine Strecke der Länge $|LC|$ aus.

- In welchem Rechteck ist das Dreieck AST gleichseitig?
Im 1: $\sqrt{3}$ Rechteck
- Wie kann man durch Faltung nachweisen, ob ein Rechteck mit 1: $\sqrt{3}$ vorliegt?
Diagonalenlänge 2 ; es entstehen 'Tütenformen'
- Wie kann man beim DIN-A-Format ein gleichseitiges Dreieck falten?
z.B.: Halbe Diagonale mit $\sqrt{3}/2$ und es ist $(\sqrt{3}/2)^2 + (1/2)^2 = 1!$

Zusammenfassende Berechnung der auftretenden Streckenlängen



Mit $|TS| = |LB|$ und der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und BCL ergeben sich die folgenden Proportionen und Längen.

$$\frac{s}{1} = \frac{d}{k}, \quad \text{d.h.} \quad s = \frac{d}{k} \quad \text{oder} \quad s = \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{k} \quad \text{oder} \quad s = \sqrt{k + \frac{1}{k^2}}$$

$$\frac{|LC|}{1} = \frac{1}{k}, \quad \text{d.h.} \quad |LC| = \frac{1}{k}$$

Mit $|TC| = |AT| = |AS|$ und der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und AMT ergeben sich die folgenden Proportionen und Längen.

$$\frac{|AT|}{\frac{d}{2}} = \frac{d}{k}, \quad \text{d.h.} \quad |AT| = \frac{d^2}{2k} \quad \text{oder} \quad |AT| = \frac{k^2 + 1}{2k} = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2}(|CD| + |CL|)$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und BCQ ergeben sich die folgenden Proportionen und Längen.

$$\frac{|QB|}{1} = \frac{k}{d}, \quad \text{d.h.} \quad |QB| = \frac{k}{d} = \frac{1}{s}$$

$$\frac{|QC|}{1} = \frac{1}{d}, \quad \text{d.h.} \quad |QC| = \frac{1}{d} = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}$$