# Das 6461-Problem - ein Beispiel für entdeckende 'Zahlentheorie'

## Erste Beobachtungen

$\frac{2\cdot 2}{2+2} = 1$ ; $\frac{27}{9} = \frac{3\cdot 3\cdot 3}{3+3+3} = 3$ ; $\frac{70}{14} = \frac{2\cdot 5\cdot 7}{2+5+7} = 5$ ;

$\frac{72}{12} = \frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3}{2+2+2+3+3} = 2\cdot 3$ ; $\frac{84}{14} = \frac{2\cdot 2\cdot 3\cdot 7}{2+2+3+7} = 7$

$\frac{105}{15} = \frac{3\cdot 5\cdot 7}{3+5+7} = 7$ ; $6461 = 7\cdot 13\cdot 71$ und $\frac{7\cdot 13\cdot 71}{7+13+71} = 71$

Bei diesen Zahlen ist das Primteilerprodukt ( d.h. die Zahl) durch die Primteilersumme teilbar.

Definition Zahlen mit obiger Eigenschaft heißen **'nette Zahlen'**.

Welche Zahlen haben diese Eigenschaft?

Beispiele für nette Zahlen:

2, 3, 4, 5, 7, 11, 13, 16, 17, 19, 23, 27, 29, 30, ..., 60,
70, 71, 72, 73,...84, 105,150,180, 220, 231, 240, 256, 286, 288, 308, 378,

Satz Es gibt keine nette Zahlen aus genau zwei, voneinander verschiedenen Primfaktoren.

Begründung:

Da p, q Primfaktoren sind ist die Gleichung $\frac{p\cdot q}{p+q} = x$ nur für x = p oder x = q lösbar. ( Nur für p = q = 2 ergibt sich die Möglichkeit x = 1)

O.B.d.A. folgt aus $\frac{p\cdot q}{p+q} = p$ dann $p\cdot q = p^2 + q\cdot p$ und somit $p^2 = 0$.

oder: *Aus $p+q = p^i q^j$ , mit i,j aus {0,1} folgt entweder i =0 oder j= 0 und somit ein Widerspruch.*

Problem: Wie konstruiert man zu einer gegebenen Zahl a die aus n, (n> 1) Primfaktoren besteht ihre oder ihren netten Nachfolger aus genau / mindestens n+1 Primfaktoren ?

Satz Für drei Primfaktoren p,q,r folgt aus der Gleichung $\frac{p \cdot q \cdot r}{p+q+r} = x$ dass nur die Fälle x = p, x = q oder x = r möglich sind, da die Fälle x = pq oder x = pr oder x = qr wie oben auf einen Widerspruch führen.

Sei o.B.d.A. x = r . Dann kann die Gleichung $\frac{p \cdot q \cdot r}{p+q+r} = r$ umgeformt werden zu

$p \cdot q - (p+q) = r$ .

*Kurz: In p+ q+ r =* $p^i q^j r^k$ *mit i,j,k* $\in$ *{0,1} muss genau ein Exponent 0 sein.*

Es ist also zu überprüfen, für welche Primzahlpaare die Differenz aus Produkt und Summe der beiden Primzahlen wieder eine Primzahl ergibt.

Beispiele:

**q = 2** führt auf **p - 2 = r** .

Diese Gleichung trifft auf alle Primzahlzwillinge r, r+2 zu. Ob es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt ist unbekannt.

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ und $\frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{2+3+5} = 3$; $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$ und $\frac{2 \cdot 5 \cdot 7}{2+5+7} = 5$

$286 = 2 \cdot 11 \cdot 13$ und $\frac{2 \cdot 11 \cdot 13}{2+11+13} = 11$

**q = 3** führt auf **2p - 3 = r**

p = 5 : $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ und $\frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{3+5+7} = 7$

p = 13 $897 = 3 \cdot 13 \cdot 23$ und $\frac{3 \cdot 13 \cdot 23}{3+13+23} = 23$

**q = 7** führt auf **6p - 7 = r**

p = 13 aus q = 7 und p = 13 folgt r = 71.

d.h. der einzig mögliche 'nette Nachfolger' von 91 aus 3 Primfaktoren ist die Zahl 6461

$$\frac{6461}{91} = \frac{7 \cdot 13 \cdot 71}{7+13+71} = 71$$

p = 17 6*17-7 = 95 , d.h. es gibt **keine** Lösung der Gestalt 7,17, r

## 'Familien' von netten Zahlen

Satz Alle Primzahlen sind nette Zahlen.

Definition:

Nette Zahlen aus mindestens 2 Primfaktoren heißen **'echt-nett'**.

Satz: Das Quadrat einer geraden netten Zahl ist nett, d.h. ist a nett und gilt 2|a dann gilt auch $a^2$ ist nett.

Beispiel: 30, 900, 810000, ...; aber : $78^2 = \underline{60}\,\underline{84}$ ist nett und 78 nicht! ;

Allgemeine Begründung für Zahlen der Form $a^p$ und p|a.

Satz: Zahlen der Form $2^p p^2$ sind nett. Beispiele: 72, 800, 6272, ...

Allgemein gilt: $q^p \cdot p^{q(q-1)}$ sind nette Zahlen, z.B. $3^p p^6$ , $5^p p^{20}$

Begründung: $\frac{q^p \cdot p^{q(q-1)}}{p \cdot q + q \cdot (q-1) \cdot p} = \frac{q^p \cdot p^{q(q-1)}}{q^2 p} = q^{p-2} p^{q(q-1)-1}$

Satz: Zahlen der Form $2^{2^n}$ sind nett.

Allgemein gilt: $p^{p^n}$ ist eine 'echt-nette' Zahl'. Beispiel: $3^{3^2} = 19683$ ; $\frac{3^9}{27} = 729$

Begründung: $\frac{p^{p^n}}{p^n \cdot p} = p^{p^n - (n+1)}$ .

Dies ist eine natürliche Zahl da für alle p, n gilt $p^n - (n+1) > 0$ .

Satz: Ist a eine nette Zahl und durch p teilbar , dann ist auch $a^p$ eine nette Zahl.

Beispiel: Aus 7|84 folgt $\frac{84^7}{2 \cdot 14 + 3 \cdot 7 + 7 \cdot 7} = \frac{29509034655744}{49} = 301112598528$

Begründung: Mit der Primfaktorsumme s gilt: $\frac{a^p}{p \cdot s} = \frac{a}{s} \cdot \frac{a}{p} \cdot a^{p-2}$

Die drei Faktoren der rechten Seite der Gleichung sind natürliche Zahlen.

Satz: Ist $a$ eine nette Zahl, so ist auch $a^a$ eine nette Zahl.

Beispiele: 3 und $3^3$; 30 und $30^{30}$ ; $5^5$ ist echt-nett, aber nicht 5 ; weder 6 noch $6^6$ sind nett.

Begründung: Sei s die Primfaktorsumme von a. Dann ist $\frac{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}{s + s + s + \ldots s} = \frac{a^a}{s \cdot a} = \frac{a}{s} \cdot a^{a-2}$

Satz: Es gibt keine <u>ungeraden netten</u> Zahlen aus <u>genau 2n</u> Primfaktoren

Begründung: Es gilt $p+q+r+s... = p^i q^j r^k s^l$ ... mit Exponenten 0 oder 1.
Die Primzahlen p,q,r,s ... sind ungerade, wie auch jedes Produkt dieser Zahlen.
Die Summe ist aber bei 2n Summanden gerade.

Beispiele: 16, 30, 150, 220, $1122 = 2\cdot 3\cdot 11\cdot 17$, $58718 = 2\cdot 11\cdot 17\cdot 157$
6461 hat keinen 'netten Nachfolger' aus 4 Primfaktoren, d.h. p*6461 ist nie nett! aber :
$6461\cdot 3\cdot 47 = 6461\cdot 141 = 911001$ ist der kleinste Nachfolger von 6461 aus genau 5 Primfaktoren. Dabei gilt: 911001 / 91 = 10011 ; (91+1001)/91 = 1092/91 = 12
Zu 105 gibt es keinen ungeraden 'netten Nachfolger' aus 4 Primfaktoren;
aber $8\cdot \underline{105} = \underline{840}$ .

'Unvollständige Familien von netten Zahlen'

Satz: Zahlen der Form $2^{2n}\cdot 3\cdot 5$ sind nett für n = 0.5, 1,2,3,4,6,8, 10,13, ...

dabei ist 13 das letzte ungerade n.

| n | 0.5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 10 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 30 | 60 | 240 | 960 | 3840 | 15360 | 245760 | 15728640 | ... |

Satz: Zahlen der Form $2^{2n}\cdot 5\cdot 11$ sind nett für n = 1,4,6,7,18,51,... Bsp: $55 * 2^{102}$

## Interessante Beispiele für nette Zahlen

$15015 = 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13$ ; $316470 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 137$ ; $572033 = 7\cdot 11\cdot 17\cdot 19\cdot 23$

Ein 'netter Nachfolger' von **2002** ist $2\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 149 = 298298$ ;

<u>Beispiele zur Abfolge der netten Zahlen:</u>

Vier aufeinanderfolgende Zahlen: 70, (71), 72, (73) (einziges Beispiel?)

$286 = 2\cdot 11\cdot 13$, $288 = 2^5\, 3^2$ ; $8084 = 2^2\cdot 43\cdot 47$, $8085 = 3\cdot 5\cdot 7^2\cdot 11$;

Bereich mit vielen 'netten Zahlen' : (2957),2958, (2963), 2964, 2967, (2969), 2970, (2971),

Ein Bereich ohne nette Zahlen liegt zwischen 1276 und 1404

Definition: **'Grundzahlen'** sind nette Zahlen ohne echt-nette Teiler.

Beispiele: 70 , da $T_{70} = \{1, 2, 5, 7, 10, 12, 35, 70\}$
72 , da $T_{72} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$
105 da $T_{105} = \{1,3,5,7,15,21,35,105\}$ ;
6461 da $T_{6461} = \{1,7,13,71,91,497,923,6461\}$

Gegenbeispiele (Nette Zahlen, die eine echt-nette Zahl als Teiler haben)

$$\frac{\frac{2625}{25}}{15} = \frac{\frac{3\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 7}{3+5+5+5+7}}{3 + 5 + 7} = \frac{105}{15} = 7 \quad ; \quad \left[ \frac{2625}{2+6+2+5} = 175 = 1^1 + 7^2 + 5^3 \quad \text{und} \quad \frac{175}{1\cdot 7\cdot 5} = 5 \right]$$

analog: $25\cdot \underline{105} = \underline{2625}$ ; $9\cdot \underline{72} = \underline{648}$ ; $36\cdot \underline{16} = \underline{576}$ ; $91\cdot \underline{30} = \underline{\underline{2730}}$

$38\cdot \underline{70} = \underline{2660}$ ; $91\cdot \underline{105} = \underline{9555}$ ; $2\cdot \underline{728} = \underline{1456}$ ;

<u>'Nette Produkte'</u> :

$$30\cdot 84 = 2520 \;;\; \frac{2\cdot 3\cdot 5}{2+3+5} = 3 \;;\; \frac{2\cdot 2\cdot 3\cdot 7}{2+2+3+7} = 2\cdot 3 \;;\; \frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2+2+2+3+3+5+7} = 3\cdot 5\cdot 7$$

$70\cdot 84 = 5880$ , aber z.B. nicht $72\cdot 84$

<u>Nette Zahlenpaare</u> vom Typ abc und abcd mit den Ziffern a,b,c,d.

$450 = 2\cdot 3^2\cdot 5^2$, 4500 ; aber nicht 45000 $\qquad$ $540 = 2^2\cdot 3^3\cdot 5$ ; 5400, aber nicht 54000;

624, 6248 ; 646, 6461; $897 = 3\cdot 13\cdot 23$, 8970

$84 = 2^2\cdot 3\cdot 7$, 840 , 8400 ; $84\cdot 10^n$ , $n \in \{0, 1,2,3,4,6,8,10,13,14,18...\}$;

$$\frac{2^2\cdot 3\cdot 7\cdot (2\cdot 5)^n}{14+7n} = \frac{2^2\cdot 3\cdot (2\cdot 5)^n}{n+2} \;;$$

$588 = 2^2\cdot 3\cdot 7^2$, 5880, ..., $588\cdot 10^n$ , $\underline{0 \le n < 6}$ !

<u>Umkehrung der Ziffernfolge</u>: 27, 72 ; $2079 = 3^3\cdot 7\cdot 11$, $9702 = 2\cdot 3^2\cdot 7^2\cdot 11$

Verdopplung in der Ziffernfolge: $4284 = 2^2\cdot 3^2\cdot 7\cdot 17$

Definition: Eine ungerade, echt-nette Zahl heißt **'super-nett'** , wenn sie nur aus (mindestens 2) voneinander verschiedenen Primfaktoren besteht. Beispiele: 105, 286, 646, 897, 6461, 15015, ...

**Statistik zu netten Zahlen:**

Unter den ersten 10000 Zahlen sind 31 ungerade echt-nette Zahlen, davon sind 14 super-nett.
Unter den ersten 500000 Zahlen sind ca. 41550 Primzahlen und 3070 echt-nette Zahlen ( d.h. Zahlen mit mehr als einem Primfaktor); es gibt also ca. 0.62% echt-nette Zahlen in diesem Bereich.