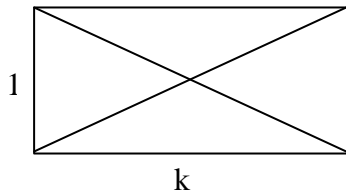


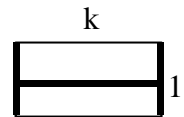
Wir bleiben in Verbindung! -
 Vergleich von Verbindungsnetzen für die Eckpunkte eines Rechtecks

Gegeben ist ein Rechteck mit den Seitenlängen 1 und k, $k > 1$

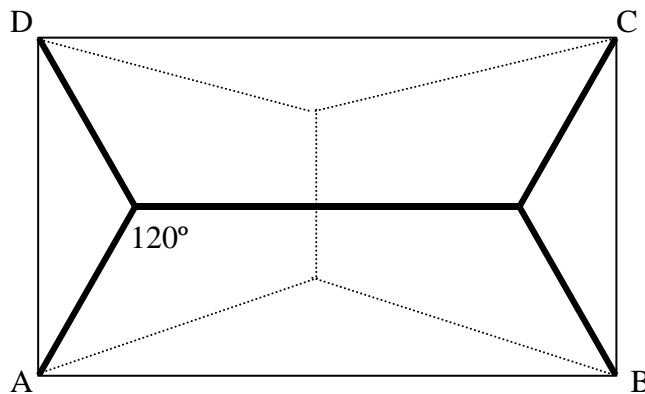
- 1) Das Diagonalenkreuz als Verbindungsnetz hat die Länge $L_1 = 2\sqrt{k^2 + 1}$



- 2) Das —|— - förmige Verbindungsnetz führt auf die Länge $L_2 = k+2$



- 3) Zeichnet man über der kleinen Rechteckseite jeweils ein gleichschenkliges Dreieck mit Basiswinkel 30° und verbindet die Spitzen der beiden Dreiecke, durch eine Mittellparallele des Rechtecks, so entsteht ein Netz mit der Länge $4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + k - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$. Zusammengefasst gilt $L_3 = k + \sqrt{3}$. Die Strahlen treffen sich im Winkel von 120° (im Fermat-Punkt)



- 4) Errichtet man die Dreiecke über der langen Rechteckseite k, was nur für $k \leq \sqrt{3}$ überschneidungsfrei möglich ist, so entsteht ein Netz der Länge $L_4 = \sqrt{3}k + 1$.

Der Vergleich der Weglängen ergibt sich aus den folgenden Ungleichungen:

Für $1 \leq k \leq \frac{4}{3}$ gilt $k + \sqrt{3} \leq \sqrt{3}k + 1 < 2\sqrt{k^2 + 1} \leq k + 2$, d.h. $L_3 \leq L_4 < L_1 \leq L_2$

Für $\frac{4}{3} < k \leq \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ gilt $k + \sqrt{3} < \sqrt{3}k + 1 \leq k + 2 < 2\sqrt{k^2 + 1}$, d.h. $L_3 < L_4 \leq L_2 < L_1$

Diese Ungleichung gilt also im Intervall $1.333 < x < 1.366$

Für $\frac{1+\sqrt{3}}{2} < k \leq \sqrt{3}$ gilt $k + \sqrt{3} < k + 2 < \sqrt{3}k + 1 \leq 2\sqrt{k^2 + 1}$, d.h. $L_3 < L_2 < L_4 \leq L_1$

Beispiele für Netzlängen bei verschiedenen Seitenverhältnissen im Rechteck

Netzlänge	k = 1	k = 4/3	$k = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ≈ 1.366	$k = \sqrt{2}$	$k = \sqrt{3}$	k = 2	$k = \sqrt{5}$
$L_3 = k + \sqrt{3}$	$1 + \sqrt{3}$ ≈ 2.73	≈ 3.06	$0.5(1 + 3\sqrt{3})$ ≈ 3.1	$\sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 3.1$	$2\sqrt{3} \approx 3.46$	$2 + \sqrt{3}$ ≈ 3.73	$\sqrt{3} + \sqrt{5} \approx 3.9$
$L_4 = \sqrt{3}k + 1$	$1 + \sqrt{3}$ ≈ 2.73	≈ 3.309	$0.5(\sqrt{3} + 5)$ ≈ 3.366	$\sqrt{6} + 1 \approx 3.45$	4	-	-
$L_2 = k + 2$	3	$3\frac{1}{3}$ ≈ 3.33	$0.5(\sqrt{3} + 5)$ ≈ 3.366	$2 + \sqrt{2}$ ≈ 3.41	$2 + \sqrt{3} \approx 3.73$	4	$2 + \sqrt{5}$ ≈ 4.23
$L_1 = 2\sqrt{k^2 + 1}$	$2\sqrt{2}$ ≈ 2.83	$3\frac{1}{3}$ ≈ 3.33	$\sqrt{2\sqrt{3} + 8}$ ≈ 3.38	$2\sqrt{3} \approx 3.46$	4	$2\sqrt{5}$ ≈ 4.47	$2\sqrt{6} \approx 4.9$

Beim Längenvergleich von Verbindungsnetzen im Würfel mit Kantenlänge 1 können die Formeln des Rechtecks verwendet werden.

- Die 4 Raumdiagonalen haben die Gesamtlänge $R_1 = 4\sqrt{3} \approx 6.93$
- Auf gegenüberliegenden Grundfläche werden Pyramiden der Höhe h errichtet. Die aufeinanderzeigenden Pyramidenspitzen werden verbunden. Die Gesamtlänge wird durch die Funktion $R_2(h) = 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{h^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + 1 - 2 \cdot h = 8\sqrt{h^2 + \frac{1}{2}} + 1 - 2h$, $0 \leq h \leq \frac{1}{2}$ berechnet. Die Randwerte lauten $R_2(0) = 4\sqrt{2} + 1 \approx 6.65$; $R_2(0.5) = 4\sqrt{3}$
Die Extremstellenbestimmung ergibt $h_E = \sqrt{\frac{1}{30}} = \sqrt{0.03} \approx 0.183$
und liefert als minimale Gesamtlänge den Wert $R_2 = \sqrt{30} + 1 \approx 6.477$
- Bildet man auf zwei gegenüberliegenden Wandflächen jeweils den Minimalweg mit der Länge $1 + \sqrt{3}$, so ergibt sich die Gesamtlänge $R_3 = 2(1 + \sqrt{3}) + 1 \approx 6.464$
- Bildet man den Minimalweg auf zwei sich kreuzenden Diagonalwänden mit $k = \sqrt{2}$, so ergibt sich die Länge $R_4 = 2(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \approx 6.2925$ und damit der (wahrscheinlich) kleinstmögliche Wert.