Dreiecksbeziehungen im Rechteck

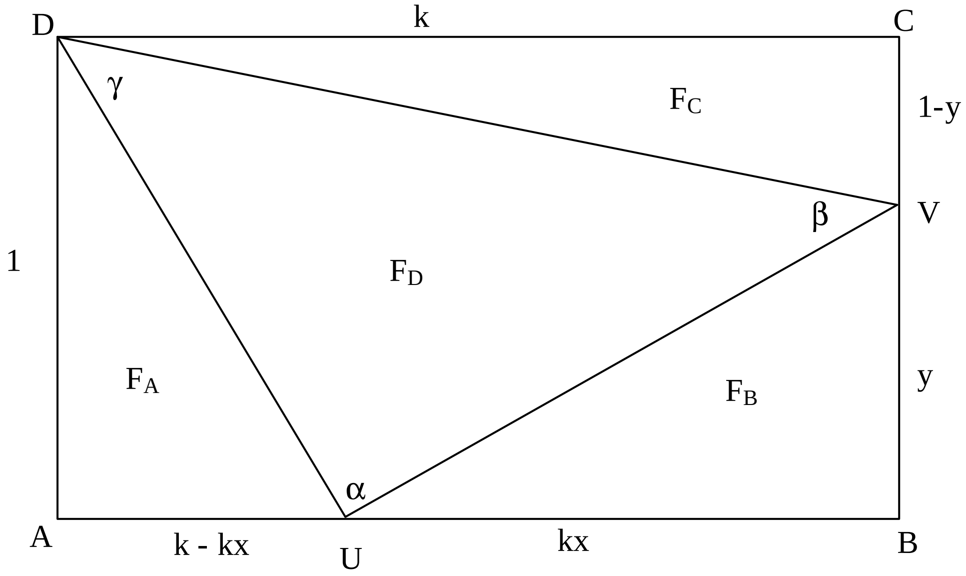
Einem Rechteck ABCD wird ein Dreieck UVD einbeschrieben, wobei U auf AB und V auf BC liegen. Auf diese Weise entstehen drei weitere Dreiecke im Rechteck. Die vier Dreiecke haben die Inhalte F_A, F_B, F_C und F_D. Das Rechteck habe die Seitenlängen 1 und k.

1. Gibt es ein Rechteck in dem U und V so festgelegt werden können, dass die vier Dreiecke den gleichen Flächeninhalt haben? Dies ist nicht möglich wie z.B. folgende Überlegung zeigt:

   Aus $F_A = \frac{k}{4}$ und $F_C = \frac{k}{4}$ folgt, dass U und V jeweils auf der Seitenmitte liegen müssen.

   Somit gilt $F_B = \frac{k}{8}$ und daher $F_c > \frac{k}{4}$.

2. Welche Bedingungen gelten für U und V, wenn wenigstens gilt: $F_A = F_B = F_C$?



U teile AB in Strecken der Längen |AU| = k-kx und |UB| = kx auf. V teile BC in Strecken der Länge y und 1-y auf. Aus $F_A = F_C$ folgt $k(1-x) = k(1-y)$ und somit $x = y$

Aus $F_A = F_B$ und $x = y$ folgt $k(1-x) = kx^2$ und somit $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Ist g der goldene Schnitt mit $g^2 = g+1$ so ist $x = g - 1 = \frac{1}{g}$. Für die Strecke der Länge $|VC| = 1 - x$

gilt dann $1 - x = 1 - (g - 1) = 2 - g = \frac{1}{g^2}$. Damit teilt V die Strecke BC im Verhältnis g:1, d.h.

im goldenen Schnitt. Entsprechendes gilt daher auch für den Punkt V auf AB.

Insgesamt ergibt sich $|AU| = \frac{k}{g^2}$, $|UB| = \frac{k}{g}$, $|BV| = \frac{1}{g}$ und $|VC| = \frac{1}{g^2}$

Für die Flächeninhalte folgt dann (ebenfalls ohne Maßeinheit)

$$F_A = F_B = F_C = \frac{k}{2g^2} = (1-\frac{g}{2})k = (1-\cos 36°)k = \frac{3-\sqrt{5}}{4}k \approx 0.191k$$

Für F_D folgt also $F_D = k - 3(1-\frac{g}{2})k = (\frac{3}{2}g - 2)k = (3\cos 36° - 2)k = \frac{(3\sqrt{5}-5)}{4}k \approx 0.427k$

Es gilt weiter $F_D = \sqrt{5}\,F_A$.

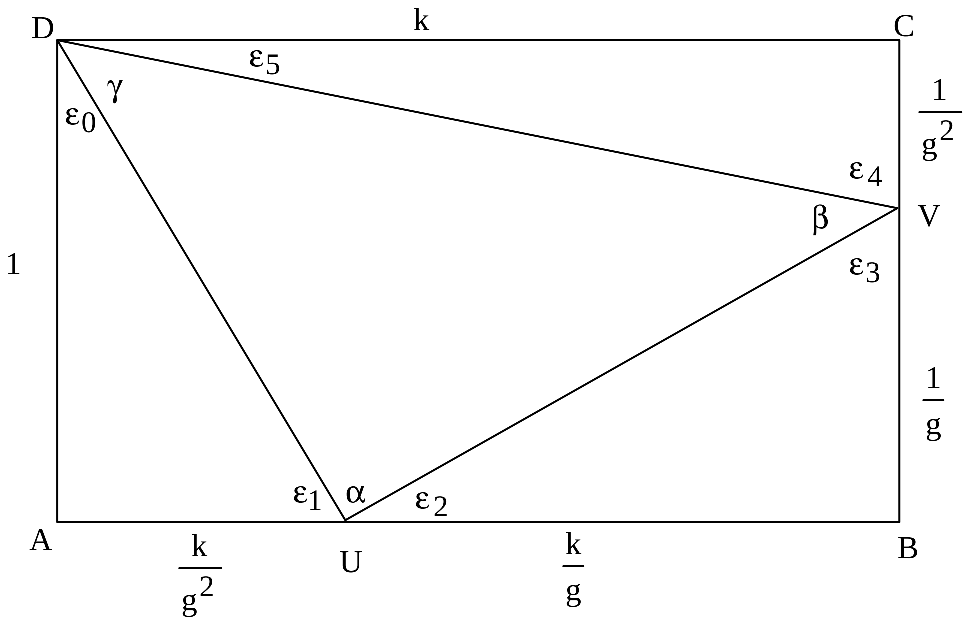
Die Flächenanteile sind unter den gegebenen Bedingungen also alle unabhängig von der Rechtecksform!

Haben im Rechteck ABCD mit dem Seitenlängen 1 und k die Dreiecke Δ AUD , Δ UBV und Δ VCD gleichen Flächeninhalt, dann teilen U und V teilen die Rechteckseiten im goldenen Schnitt g, wobei für g gilt $\frac{1}{g} = g - 1$ und $\frac{1}{g^2} = 2 - g$ und somit $\frac{1}{g} + \frac{1}{g^2} = 1$

Die Dreiecke Δ AUD , Δ UBV und Δ VCD haben dann (ohne Maßeinheit) jeweils den Flächeninhalt

$$F = \frac{k}{2g^2} \quad \text{bzw.} \quad F = \frac{k}{3+\sqrt{5}} = \frac{3-\sqrt{5}}{4}k \approx 0.191k$$

Satz:
Haben im Rechteck ABCD die Dreiecke Δ AUD , Δ UBV und Δ VCD gleichen Flächeninhalt, dann gilt $\cot\alpha + \cot\beta = \cot\gamma$. (s. Bild)



Für die folgenden Tangensberechnungen werden nebenstehende Formeln verwendet:

$$\tan(\delta_1 + \delta_2) = \frac{\tan\delta_1 + \tan\delta_2}{1 - \tan\delta_1 \cdot \tan\delta_2} \quad ; \quad \tan(180° - \delta) = -\tan\delta \quad \text{und} \quad \tan(90° - \delta) = \cot\delta$$

Mit den Tangenswerten der Winkel ε_i können die Tangens- bzw. Cotangenswerte der Winkel α, β und γ bestimmt werden.

$$\left.\begin{aligned} \tan\varepsilon_1 &= \frac{g^2}{k} \\ \tan\varepsilon_2 &= \frac{1}{k} \end{aligned}\right\} \quad \tan\alpha = -\tan(\varepsilon_1+\varepsilon_2) = -\frac{\dfrac{g^2}{k}+\dfrac{1}{k}}{1-\dfrac{g^2}{k^2}} = \frac{k(g^2+1)}{g^2-k^2}, \quad k \neq g$$

$$\left.\begin{aligned} \tan\varepsilon_3 &= k \\ \tan\varepsilon_4 &= g^2 k \end{aligned}\right\} \quad \tan\beta = -\tan(\varepsilon_3+\varepsilon_4) = -\frac{k+g^2k}{1-g^2k^2} = \frac{k(g^2+1)}{g^2k^2-1}$$

$$\left.\begin{aligned} \tan\varepsilon_5 &= \frac{1}{g^2k} \\ \tan\varepsilon_0 &= \frac{k}{g^2} \end{aligned}\right\} \quad \cot\gamma = \tan(\varepsilon_5+\varepsilon_0) = \frac{\dfrac{k}{g^2}+\dfrac{1}{g^2k}}{1-\dfrac{k}{g^4k}} = \frac{g^2(k^2+1)}{k(g^4-1)} = \frac{\sqrt{5}(k^2+1)}{5k}$$

$$\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\beta} = \frac{g^2-k^2+g^2k^2-1}{k(g^2+1)} = \frac{(g^2-1)\cdot(k^2+1)}{k(g^2+1)} = \frac{(g^2-1)^2\cdot(k^2+1)}{k(g^4-1)}$$

Wegen $g^2 - 1 = g$ kann dies umgeformt werden zu

$$\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\beta} = \frac{g^2(k^2+1)}{k(g^4-1)} = \cot\gamma\text{ ; d.h. es gilt}\quad \cot\alpha+\cot\beta = \cot\gamma$$

Sonderfälle:

Im Quadrat gilt $\tan\alpha = \tan\beta = \sqrt{5}$ und $\tan\gamma = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, d.h. $\alpha = \beta \approx 65.9°$ und $\gamma_{max} \approx 48.19°$

Auch für $k = g$ ist das Dreieck UVD gleichschenklig: Basis VD und rechter Winkel bei U !