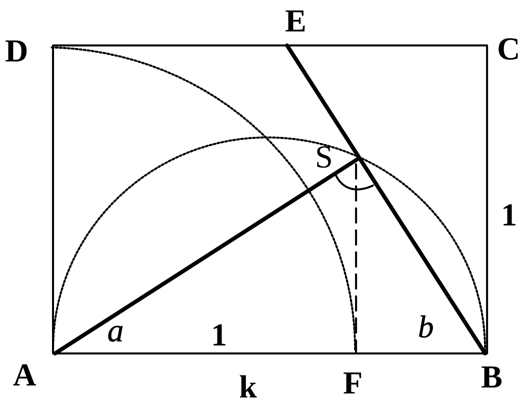
Von Rechteck zu Rechteck - die Folgen einer elementaren Dreiteilung
oder ‚Te-ologie des Rechtecks'

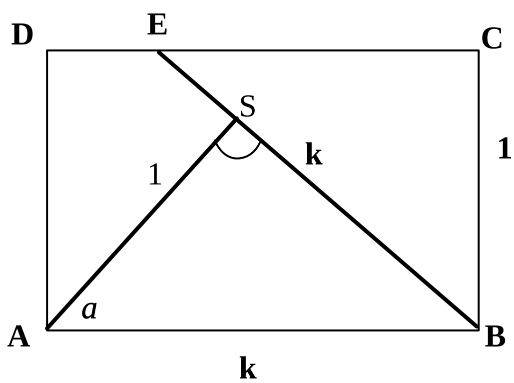
Experimentieren - Entdecken - Begründen - Vernetzen - Vertiefen

Im Unterricht der Mittelstufe wird i.a. das Thema „Quadratur eines Rechtecks" behandelt.
Dabei ist es zur Motivation und Veranschaulichung günstig, wenn diese Verwandlung nicht nur konstruiert, sondern auch durch eine einfache Zerlegung und Umlegung praktisch durchgeführt werden kann.
Ausgehend von diesem Beispiel werden dann im Folgenden Fragestellungen aufgegriffen, die in verschiedenen Klassenstufen eine gewinnbringende Verknüpfung von Themengebieten und Techniken erlauben, wobei durch Experimente, geometrische Argumentationen und Berechnungen entdeckendes Lernen möglich ist. Alle Fragestellungen sind so angelegt, dass sie in der Schule behandelt werden können, aus Zeitgründen zum Teil aber nur in Projekten bzw. Arbeitsgemeinschaften durchführbar sind.

Jedes Rechteck mit einem Seitenverhältnis k : 1 , $1 \le k \le 2$ kann durch folgende **T**- förmige Aufteilung zerlegt werden:
Es sei ASB ein rechter Winkel, d.h. BE **orthogonal** zu $\overline{AS}$ und die Strecke $\overline{AF}$ so lang wie $\overline{AD}$.
Die beiden Dreiecke und das Viereck ASED können zu einem Viereck mit Grundseite $\overline{AS}$ umgelegt werden. Dass es sich dabei um ein Quadrat handelt, kann durch die Kongruenz der Dreiecke AFS und BCE begründet werden.
Mit Ähnlichkeit oder mit Kathetensatz lässt sich begründen, dass |AS| = |BE | = $\sqrt{k}$ LE gilt.
Zwischen dem Zerlegungswinkel a und dem Seitenverhältnis k besteht der Zusammenhang $\cos a = \frac{1}{\sqrt{k}}$.



Quadratur mit
***T**-Zerlegung*



Phönix mit
***T**-Zerlegung*

Als Ergänzung können die Schüler die folgende Situation untersuchen.

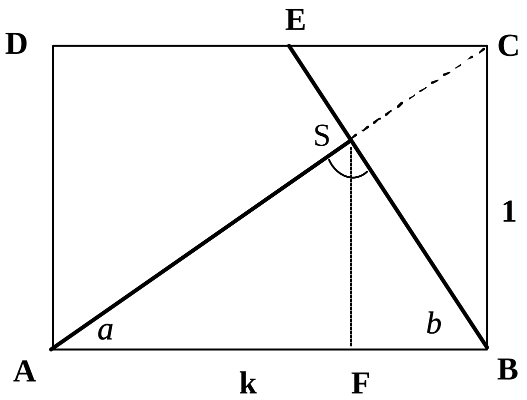
> Sei |BE| = k LE und $\overline{AS}$ orthogonal zu $\overline{EB}$.
> Werden nun die drei Teile in entsprechender Weise umgelegt, wie bei der Quadratur des Rechtecks, so entsteht wieder das Ausgangsrechteck. (Es gilt |AS| = |CB|)

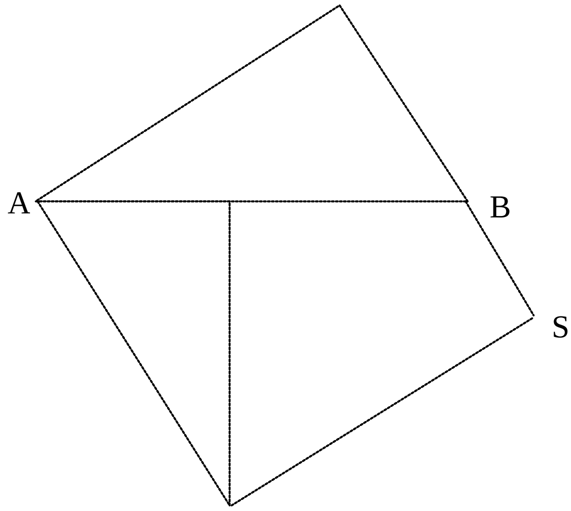
Die beiden dargestellten Fälle führen in den folgenden Variationen der Dreiteilung von Rechtecken auf weiterführende Fragestellungen.

Zerlegungen mit dem ‚Diagonalen-T'

Für die folgenden Fragestellungen wird nun die Strecke $\overline{AS}$ als <u>Teilstrecke der Diagonalen</u> betrachtet. Jedes Rechteck mit einem Seitenverhältnis $k:1$, $k \geq 1$ kann durch nebenstehende Aufteilung zerlegt werden. Dabei sei $\overline{AC}$ die **Diagonale** und $\overline{BE}$ **orthogonal** zu $\overline{AC}$.

Die Aufteilung des Rechtecks kann daher als ***'Diagonalen-T'*** bezeichnet werden.





Bei der Aufteilung entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke sowie ein Sehnenviereck mit rechten Winkeln bei D und S.
Die drei Teile können z.B. zu einem Parallelogramm, zu *zwei i.a.* verschiedenen Trapezen oder zu einem weiteren **'Zielrechteck'** umgelegt werden.

Erfolgt die T-Zerlegung auf der Diagonalen, dann ist das Seitenverhältnis k' des Zielrechtecks <u>nur</u> vom Seitenverhältnis k des Ausgangsrechtecks abhängig.

Beim entstehenden Zielrechteck sind zwei Fälle besonders interessant:

- Das Zielrechteck entspricht dem Ausgangsrechteck, d.h. es hat das gleiche Seitenverhältnis k = k' = p. Wie kann p bestimmt werden?

- Das Zielrechteck ist ein Quadrat mit k = 1; das Ausgangsrechteck oder ‚Präquadrat' hat das Verhältnis k = q. Wie kann q bestimmt werden?

Das Phönix-Rechteck

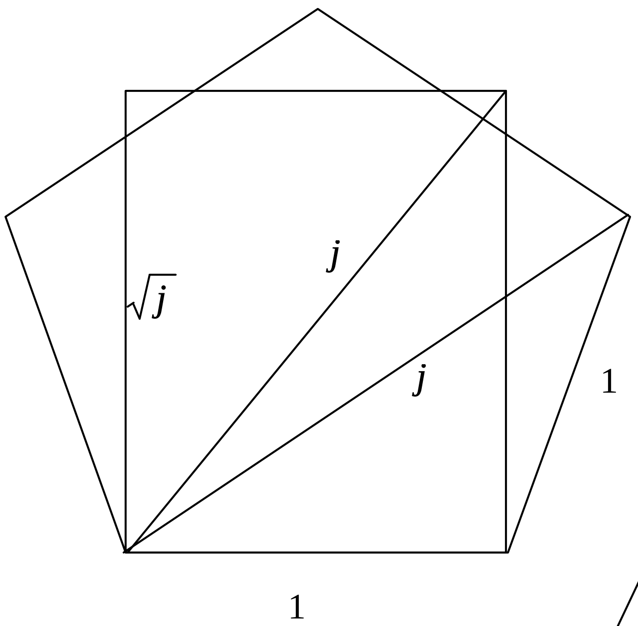
Das Phönix-Rechteck habe das Seitenverhältnis $p : 1$.
Das neue Rechteck mit dem identischen Seitenverhältnis hat die Seitenlängen |AS| und |BE|.
Da das Format des Rechtecks unverändert ist, muss gelten |AS| = 1LE.
Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und ASB folgt dann |AB| **:** |AS| = |AC| **:** |AB| , also
gilt $p = \frac{\sqrt{p^2+1}}{p}$, d.h. $p^4 = p^2 + 1$. Mit der Substitution $x = p^2$ folgt dann $x^2 = x + 1$;

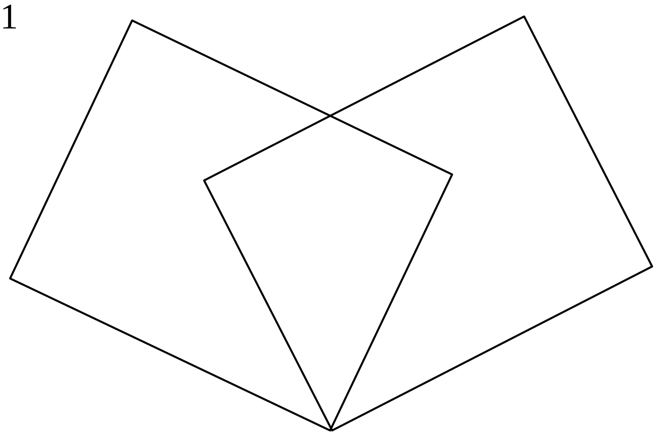
Es ergibt sich also für x die Zahl φ des **goldenen Schnittes** und somit das Ergebnis

$$p = \sqrt{j} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \text{ , oder } p = \sqrt{2\cos 36°} \approx 1.2720 .$$

Die Diagonale dieses 'Phönix-Rechtecks' hat dann gerade die Länge φ , d.h. das Phönix-Rechteck stimmt mit einem regelmäßigen Fünfeck gleicher Grundseite in der Diagonale überein.
Das Rechteck ist in zwei kongruente Dreiecke mit den Kathetenlängen 1 und $\sqrt{j-1}$, sowie einen Drachen mit den Seitenlängen 1 und $\sqrt{j} - \sqrt{j-1}$ ($j^{-1,5} \approx 0.49$) zerlegt.
Das Phönix-Rechteck erlaubt eine besonders symmetrische Anordnung zweier Rechtecke (siehe Skizze).
Die Verlängerungen der jeweiligen Rechteckseiten verlaufen durch die Eckpunkte des zweiten Rechtecks.

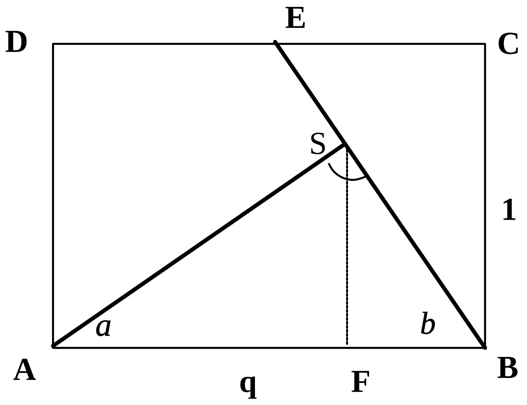
Ein möglichst großes Rechteck mit dem gewünschten Seitenverhältnis lässt sich aus einem Rechteck im DIN-A4-Format mit der kurzen Seite $a = \frac{25}{\sqrt[4]{2}}$ cm ≈ 21.02 cm ist und der langen Seite $b = 25\sqrt[4]{2}\,\sqrt{\cos 36°}$ cm ≈ 26.74 cm herstellen.



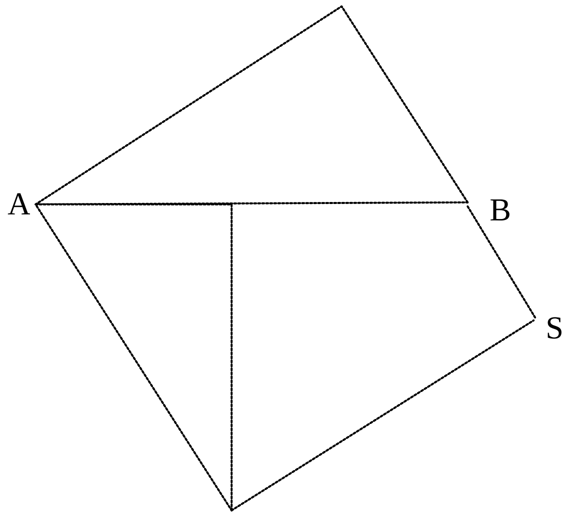


Quadratur eines Rechtecks - und 'seine Folgen'

Bestimme das Seitenverhältnis q : 1 desjenigen Rechtecks, das bei nebenstehender Aufteilung durch das ‚Diagonalen-T' in ein Quadrat umgelegt werden kann. Sei |BC| = 1 LE und |AB| = q LE und q>1 .



Präquadrat mit Zerlegung
durch Diagonalen-T



Die Diagonale $\overline{AC}$ und die Strecke BE stehen senkrecht aufeinander.
Der Schnittpunkt dieser beiden Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BE}$ ist S. Um ein Quadrat aus den drei Teilstücken legen zu können, muss gelten |AS| = |BE|

Da das Rechteck den Flächeninhalt q FE hat, gilt $|AS| = \sqrt{q}$ LE .
In den ähnlichen Dreieck ABC, BEC gilt

$$|AS| = |BE| : 1 = \sqrt{q^2+1} : q \text{ , also } \qquad |AS| = \frac{\sqrt{q^2+1}}{q}$$

Aus $\frac{\sqrt{q^2+1}}{q} = \sqrt{q}$ folgt für das Verhältnis die Bestimmungsgleichung $q^3 = q^2 + 1$.

Diese Gleichung hat sicher keine ganzzahligen Lösungen.
Die reellen (irrationalen) Lösungen der Gleichung $x^3 - x^2 - 1 = 0$ können mit dem Newtonverfahren näherungsweise bestimmt werden:

Die Iterationsformel $x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^3 - x_i^2 - 1}{3x_i^2 - 2x_i}$ liefert mit $x_0 = 1.5$ den Wert

$$q \approx 1.4655712318 \ldots$$

Ein möglichst großes Rechteck mit dem gewünschten Seitenverhältnis lässt sich aus einem Rechteck im DIN-A4-Format mit der langen Seite $a = |AB| = 25\sqrt[4]{2}$ cm ≈ 29.73 cm und der kurzen Seite mit $b = 25\frac{\sqrt[4]{2}}{q}$ cm $\approx$ 20.29 cm herstellen.

Allgemeiner Zusammenhang zwischen den Seitenverhältnissen von Ausgangs- und Zielrechteck

Ist k’ das Seitenverhältnis des neu entstandenen Rechtecks, so ergeben sich aus den Ähnlichkeitsbeziehungen die Gleichungen

$$\frac{|AS|}{k} = \frac{k}{|AC|} \quad \text{und} \quad \frac{|BE|}{1} = \frac{|AC|}{k} \quad \text{und} \quad k' = \frac{|AS|}{|BE|} = \frac{k^3}{k^2+1}$$

und damit allgemein die Beziehung $k' = \dfrac{k^3}{k^2+1}$ für k $\geq$ q und somit $k' \geq 1$;

für k < q gilt: $k' = \dfrac{k^2+1}{k^3}$

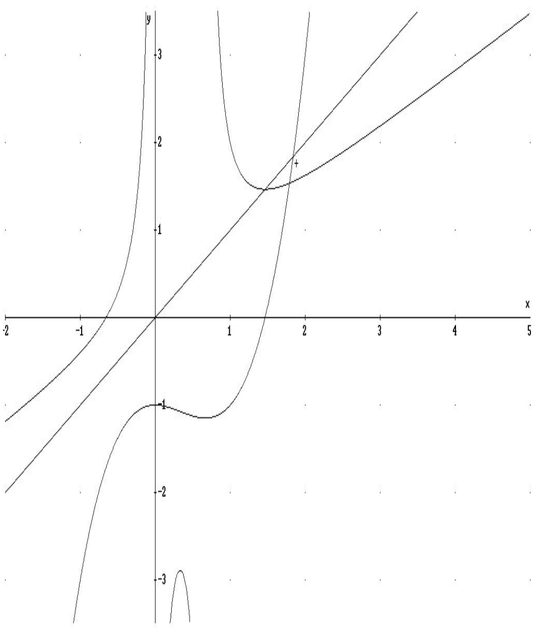
Für das entstehende Quadrat mit $k' = 1$ folgt die Gleichung $k^3 = k^2 + 1$ mit der Lösung q wie oben.

Für k = q entsteht der Zerlegungswinkel a mit $\cos a = \dfrac{\sqrt{q}}{q}$, also $a \approx 34.306^{\circ}$

Die allgemeinen Iterationsverfahren $x_{i+1} = \sqrt[3]{x_i^2 + 1}$ und $x_{i+1} = \dfrac{1}{x_i^2} + 1$ konvergieren ebenfalls für beliebiges x_0 gegen q. *(Begründung s. Konvergenzbereiche zu Iterationsvorschriften)*

In den ersten Iterationsschritten ergeben sich folgende Werte

$x_{i+1} = x_i - \dfrac{x_i^3 - x_i^2 - 1}{3x_i^2 - 2x_i}$	1.5	1.46666	1.4655712	1.4655712	1.4655712
$x_{i+1} = \sqrt[3]{x_i^2 + 1}$	1.5	1.481248	1.4727057	1.4688173	1.4670479
$x_{i+1} = \dfrac{1}{x_i^2} + 1$	1.5	1.444444	1.4792899	1.456976	1.4710805



Das Newtonverfahren konvergiert sehr schnell. Anschauliche Begründung: Die Iterationskurve schneidet die Winkelhalbierende sehr flach, da die newtonsche Iterationsfunktion $j(x)$ zu $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ an der Nullstelle x_N von f eine Extremstelle hat.

Aus $j(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ folgt $j'(x_N) = 0$ wegen

$$j'(x) = \frac{f(x)\,f''(x)}{f'(x)^2} \quad \text{und} \quad j''(x_N) = \frac{f''(x_N)}{f'(x_N)}$$

für $f'(x_N \neq 0$ *und* $f''(x_N) \neq 0$

Alternativer Lösungsweg zur Gleichung $x^3 = x^2 + 1$

Bildet man aus der Gleichung $x^3 = x^2 + 1$ durch Multiplikation mit x und anschließender Substitution mit den jeweils vorangehenden Gleichungen eine weitere Gleichung, so entsteht eine **Folge** von Gleichungen mit wachsenden Koeffizienten.

$$\begin{array}{llll}
x^3 & = & & x^2 + 1 \\
x^4 & = x^3 + x & = & x^2 + x + 1 \\
x^5 & = x^4 + x^2 & = & 2x^2 + x + 1 \\
x^6 & = x^5 + x^3 & = & 3x^2 + x + 2 \\
x^7 & = x^6 + x^4 & = & 4x^2 + 2x + 3 \\
x^8 & = x^7 + x^5 & = & 6x^2 + 3x + 4 \\
x^9 & = & & 9x^2 + 4x + 6 \\
x^{10} & = & & 13x^2 + 6x + 9 \\
x^{11} & = & & 19x^2 + 9x + 13 \\
x^{12} & = & & 28x^2 + 13x + 19
\end{array}$$

Vermutung: Für die Koeffizienten gilt $x^{n+1} = a_{n+1} x^2 + a_{n-1} x + a_n$ mit $\mathbf{a_{n+2} = a_{n+1} + a_{n-1}}$

(Hinweis: Die Rekursion $\mathbf{a_{n+3} = a_{n+2} + a_n}$ hat die charakteristische Gleichung $x^3 = x^2 + 1$)

Startet man mit den Werten $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ und $a_3 = 1$,
so erhält man durch die Rekursionsgleichung die ‚Quadraturfolge'

0, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, 60, 88, 129, 189, 277, 406, 595, 872, 1278, 1873, 2745, 4023, 5896, 8641, 12664, 18560, 27201, 39865, 58425, 85626, 125491, 183916 269542, 395033, 578949, 848491, 1243524, 1822473, 2670964, 3914488, 5736961,…

Für den Quotienten aufeinanderfolgender Folgeglieder gilt

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n-1}}{a_{n+1}} + 1 = \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} + 1 \quad .$$

Derive-Befehl zur Definition der Folge

```
a(n) := If n = 1
         0
         If n = 2
          1
           If n = 3
            1
           a(n - 1) + a(n - 3)
```

Wenn der Quotient aufeinanderfolgender Folgeglieder einem Grenzwert q zustrebt,

dann gilt $q = \frac{1}{q^2} + 1$, also $\mathbf{q^3 = q^2 + 1}$.

Beispiele:

Der Quotient $\frac{1873}{1278}$ liefert q = 1.4655712...

Aus der Quadraturfolge können die optimalen Seitenlängen für das Präquadrat entnommen werden. So ergibt das Rechteck mit den Seitenlängen 18.9 und 27.7 nach Umlegung ein Fastquadrat mit dem Seitenverhältnis k' = 1.000042.

Legt man die Gleichung $x^3 = x^2 + 1$ zugrunde, so sind durch fortgesetzte Substitution in der Gleichung $x^n = a_n x^2 + b_n x + c_n$ die Koeffizienten a_i, b_i, c_i festgelegt.

Behauptung: $\mathbf{a_{n+2} = a_{n+1} + a_{n-1}}$ mit $a_1 = 0$; $a_2 = 1$, $a_3 = 1$

Zum Beweis werden für die Folgen (a_n), (b_n), (c_n) die folgenden Rekursionsgleichungen bewiesen

$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n$; $\mathbf{b}_{n+1} = \mathbf{c}_n$; $\mathbf{c}_{n+1} = \mathbf{a}_n$, für alle $n \geq 1$

Nach Definition der Koeffizienten a_i, b_i, c_i gilt $x^{n+1} = a_{n+1} x^2 + b_{n+1} x + c_{n+1}$ (*)

Andererseits kann die Gleichung $x^n = a_n x^2 + b_n x + c_n$ durch beidseitige Multiplikation mit dem Faktor x in die Form $x^{n+1} = a_n x^3 + b_n x^2 + c_n x$ gebracht werden.

Ersetzt man x^3 durch den Term $x^2 + 1$ und sortiert nach Potenzen von x, so erhält man die Gleichung $x^{n+1} = (a_n + b_n) x^2 + c_n x + a_n$.
Ein Koeffizientenvergleich mit (*) liefert die gewünschten Rekursionsgleichungen.

Die Rekursionsgleichungen $\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n$; $\mathbf{b}_{n+1} = \mathbf{c}_n$; $\mathbf{c}_{n+1} = \mathbf{a}_n$ können für die Folge a_i zusammengefasst werden.
Es gilt $\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n = \mathbf{a}_n + \mathbf{c}_{n-1} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_{n-2}$,also $\mathbf{a_{n+2} = a_{n+1} + a_{n-1}}$
Entsprechend gilt $\mathbf{b_{n+2} = b_{n+1} + b_{n-1}}$ und $\mathbf{c_{n+2} = c_{n+1} + c_{n-1}}$

Mit den Anfangswerten $a_1 = 0$; $b_1 = 1$; $c_1 = 0$ folgt $a_2 = 1$; $b_2 = 0$; $c_2 = 0$
und weiter $a_3 = 1$; $b_3 = 0$; $c_3 = 1$.
Wegen $x^3 = x^2 + 1 = a_3 x^2 + b_3 x + c_3$ ergeben sich für n = 3 die obigen Werte.
Damit sind die Anfangswerte $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ und $a_3 = 1$ für die Folge (a_i) korrekt.

Bemerkungen

Es gilt allgemein:
Wird die Potenz k^n einer Lösung k der Gleichung $x^3 = p_1 x^2 + p_2 x + p_3$ durch $k^n = a_n k^2 + b_n k + c_n$ dargestellt, dann gilt für a_n, b_n und c_n jeweils die entsprechende Rekursion $a_{n+3} = p_1 a_{n+2} + p_2 a_{n+1} + p_3 a_n$.

Formale Lösung der Gleichung 3. Grades $x^3 = x^2 + 1$

Die Gleichung $x^3 - x^2 - 1 = 0$ kann durch die Substitution $x = t - 1/3$ in die Gleichung

$t^3 - t/3 - 29/27 = 0$ und mit $x = (z+1)/3$ weiter zu $z^3 - 3z - 29 = 0$ transformiert werden.

Mit der Lösungsformel von Cardano folgt $z = \sqrt[3]{14.5 + 1.5\sqrt{93}} + \sqrt[3]{14.5 - 1.5\sqrt{93}}$.

Die reelle Lösung lautet $x = \sqrt[3]{\frac{29}{54} + \frac{\sqrt{93}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{29}{54} - \frac{\sqrt{93}}{18}} + \frac{1}{3}$, d.h. $x \approx 1.46557123$

Die Iterationsformel $z = \sqrt[3]{3z + 29}$ liefert ebenso Näherungswerte für alle Startwerte z_0.

Eigenschaften der ‚Quadraturfolge' (a_n)

mit $\mathbf{a_{i+3} = a_{i+2} + a_i}$ und $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ und $a_3 = 1$

Die 'Quadraturfolge' kann in Analogie zur Fibonaccifolge auf ihre Eigenschaften untersucht werden.

1) Die Differenzenfolge von (a_n) ist wieder (a_n) - „um zwei Plätze verschoben",
da gilt $a_i = a_{i+3} - a_{i+2}$

2) $a_{i+1} + a_i + a_{i-1} = a_{i+3}$, da $a_{i-1} + a_{i+1} = a_{i+2}$

3) Es gilt $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_{n+3} - 1$

Beweis mit ‚Reißverschlussverfahren'

$$\begin{aligned} a_4 - a_3 &= a_1 \\ a_5 - a_4 &= a_2 \\ a_6 - a_5 &= a_3 \\ a_7 - a_6 &= a_4 \\ a_8 - a_7 &= a_5 \\ &\ldots\ldots \\ a_{n+2} - a_{n+1} &= a_{n-1} \\ a_{n+3} - a_{n+2} &= a_n \end{aligned}$$

4) $a_i^2 = a_i a_{i-1} + a_i a_{i-3}$ da $a_i^2 = a_i\, a_i = a_i\,(a_{i-1} + a_{i-3})$

$a_i^2 = a_i a_{i+1} - a_i a_{i-2}$ da $a_i^2 = a_i\, a_i = a_i\,(a_{i+1} - a_{i-2})$

$a_i^2 = a_{i-1}^2 + 2a_{i-1}a_{i-3} + a_{i-3}^2$ da $a_i^2 = (a_{i-1} + a_{i-3})^2$

5) $a_{i+2}^2 + a_i^2 - a_{i-1}^2 = a_{2i+1}$ (siehe Induktionsbeweis!)

6) Aus 5) folgt: $a_{i+2}^2 + a_i^2 - a_{i-1}^2 = a_{2i+1}$ und

$a_{i+1}^2 + a_{i-1}^2 - a_{i-2}^2 = a_{2i-1}$

Die Summe führt auf die zu 5) gleichwertige Aussage

$$a_{i+2}^2 + a_{i+1}^2 + a_i^2 - a_{i-2}^2 = a_{2i+2}$$

7) $a_2 + a_5 + a_8 + a_{11} + a_{14} + \ldots + a_{3n-1} = a_{3n}$

Induktionsbeweis zu $\qquad a_{i+2}^2 + a_i^2 - a_{i-1}^2 = a_{2i+1}$

<u>Induktionsanfang</u> Die Gleichung ist korrekt für z.B. für alle i < 10

<u>Annahme</u> $a_{k+2}^2 + a_k^2 - a_{k-1}^2 = a_{2k+1}$ ist richtig für ein festes k

<u>Schluss:</u> Zeige Dann gilt auch $a_{k+3}^2 + a_{k+1}^2 - a_k^2 = a_{2k+3}$ *)

Der Induktionsannahme entsprechen nach 6) auch die Gleichungen

$$a_{k+2}^2 + a_{k+1}^2 + a_k^2 - a_{k-2}^2 = a_{2k+2} \quad \text{und}$$

$$a_{k+1}^2 + a_k^2 + a_{k-1}^2 - a_{k-3}^2 = a_{2k}$$

Die Summe führt zur <u>neu formulierten Induktionsannahme</u>

$$a_{k+2}^2 + 2a_{k+1}^2 + 2\,a_k^2 + a_{k-1}^2 - a_{k-2}^2 - a_{k-3}^2 = a_{2k+3}$$

Wenn gezeigt werden kann, dass die linke Seite von *) gleich der linken Seite der obigen Gleichung ist, dann ist der Induktionsschluss erfüllt.

Es ist durch äquivalente Umformungen nach 4) nachzuweisen dass gilt

$$a_{k+2}^2 + 2a_{k+1}^2 + 2\,a_k^2 + a_{k-1}^2 - a_{k-2}^2 - a_{k-3}^2 = a_{k+3}^2 + a_{k+1}^2 - a_k^2$$

$$a_{k+2}^2 + a_{k+1}^2 + 3a_k^2 + a_{k-1}^2 - a_{k-2}^2 - a_{k-3}^2 = a_{k+3}^2$$

$$a_{k+2}^2 + a_{k+1}^2 + 3a_k^2 + a_{k-1}^2 - a_{k-2}^2 - a_{k-3}^2 = a_{k+2}^2 + 2a_{k+2}a_k + a_k^2$$

$$a_{k+1}^2 \quad + \quad a_k^2 \quad + \quad a_k^2 \quad + \quad a_{k-1}^2 - a_{k-2}^2 - a_{k-3}^2 = 2a_{k+2}a_k$$

$$\overbrace{a_k^2 + 2a_k a_{k-2} + a_{k-2}^2} + a_k^2 + \overbrace{a_{k-1}^2 + 2a_{k-1}a_{k-3} + a_{k-3}^2} + a_{k-1}^2 - a_{k-2}^2 - a_{k-3}^2 = 2a_{k+2}a_k$$

$$2a_k^2 + 2a_k a_{k-2} + 2\,a_{k-1}^2 + 2a_{k-1}a_{k-3} = 2a_{k+2}a_k$$

$$a_k a_{k+1} - a_k a_{k-2} + a_k a_{k-2} + a_{k-1}a_k - a_{k-1}a_{k-3} + a_{k-1}a_{k-3} = a_{k+2}a_k$$

$$a_k a_{k+1} + a_{k-1}a_k = a_{k+2}a_k$$

d.h. $\quad a_k\,(a_{k+1} + a_{k-1}) = a_{k+2}a_k$

Konvergenzbereich zur Iterationsvorschrift $x_{i+1} = \sqrt[3]{x_i^2+1}$, x > 0

Die Gleichung $x^3 = x^2+1$, x > 0 führt auf $x = \sqrt[3]{x^2+1}$, x > 0 und somit zur Iterationsfunktion

$$t(x) = \sqrt[3]{x^2+1} \;, x > 0 \text{ mit } t'(x) = \frac{2x}{3(x^2+1)^{2/3}} \;, x > 0$$

Das Iterationsverfahren $x_{i+1} = t(x_i)$ konvergiert für jeden Startwert x mit x > 0 ,

wenn gilt $|t'(x)| \le s < 1$ für alle x > 0

Die notwendige Bedingung $|t'(x)| \le s < 1$ ist mit der Ungleichung $\frac{2x}{3(x^2+1)^{2/3}} < \frac{2}{3}$ sicher erfüllt. Diese Ungleichung kann durch äquivalente Umformungen bewiesen werden

$$\frac{2x}{3(x^2+1)^{2/3}} < \frac{2}{3} \iff x < (x^2+1)^{2/3} \iff x^3 < (x^2+1)^2.$$

Äquivalent dazu ist $x^3 < x^4 + 2x^2 + 1$

Diese Ungleichung ist erfüllt für alle x > 0 .

(Aus 1< x folgt $x^3 < x^4 < x^4 + 2x^2 + 1$; für 0< x < 1 folgt $0 < x^3 < 1$ und somit auch $x^3 < 1 + x^4 + 2x^2$)

Das Iterationsverfahren $x_{i+1} = t(x_i)$ konvergiert somit für alle Startwerte $x_0 > 0$.

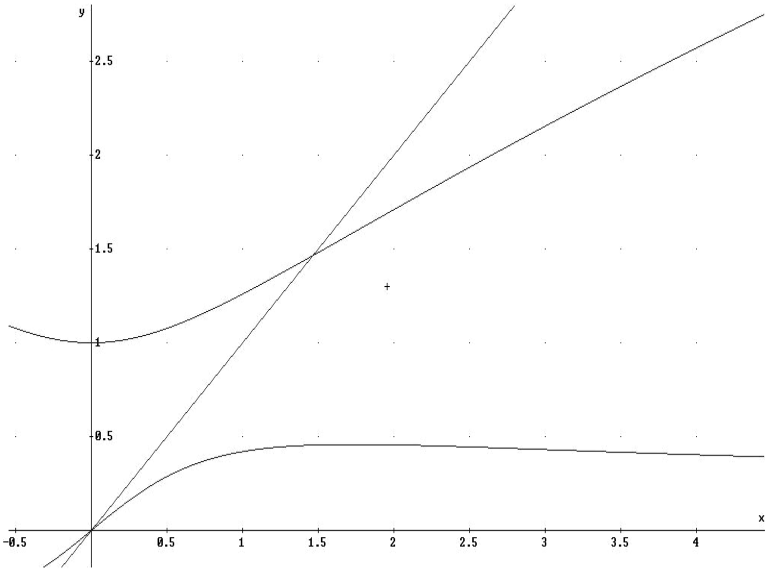


Schaubild der Iterationsfunktion, ihrer Ableitung und der Winkelhalbierenden.

Konvergenzbereich zur Iterationsvorschrift $x_{i+1} = \frac{1}{x_i^2} + 1$, x > 0

Die Gleichung $x^3 = x^2 + 1$, x > 0 führt auf $x = \frac{1}{x^2} + 1$, x > 0

und somit zur Iterationsfunktion $t(x) = \frac{1}{x^2} + 1$, x > 0 mit der Ableitung $t'(x) = \frac{-2}{x^3}$

Das Iterationsverfahren $x_{i+1} = t(x_i)$ konvergiert im Intervall $[a,b]$ wenn gilt

- mit $x_i \in [a,b]$ folgt $x_{i+1} \in [a,b]$ und
- $|t'(x)| \le s < 1$ gilt für alle $x \in [a,b]$

Die Bedingung $\left|\frac{-2}{x^3}\right| \le s < 1$ ist für $\sqrt[3]{2} < 1.26 \le x$ erfüllt.

Für a = 1.26 und $b = 1.63 > \frac{1}{a^2} + 1$ gilt die Behauptung:

Mit $x_i \in [a,b]$ ist auch $x_{i+1} \in [a,b]$

Begründung:

Aus $a \le x_i$ folgt $a^2 \le x_i^2$, somit $x_{i+1} = \frac{1}{x_i^2} + 1 \le \frac{1}{a^2} + 1 < b$,

d.h. $x_{i+1} \le b$

Aus $x_i \le b$ folgt $x_i^2 \le b^2$ und weiter $\frac{1}{b^2} + 1 \le \frac{1}{x_i^2} + 1 = x_{i+1}$;

zusammen mit $a < \frac{1}{b^2} + 1$ ergibt sich $a < x_{i+1}$

Die Konvergenzbedingungen des Iterationsverfahrens sind für alle $x_i \in [a,b]$ erfüllt. Somit konvergiert das Verfahren $x_{i+1} = t(x_i)$ für alle Startwerte aus dem Intervall [a,b]. Es konvergiert gegen die Lösung der Gleichung $x = \frac{1}{x^2} + 1$, $x > 0$, da diese ebenfalls im Intervall [a,b] liegt.

Für alle anderen Startwerte x > 0 kann überprüft werden, dass sie nach höchstens 5 Iterationsschritten in das Intervall [a,b] führen.

Aus $x_i \leq 1$ folgt $x_{i+1} > 1$; aus $x_i > 2$ folgt $1 < x_{i+1} < 2$

Aus $1 < x_{i+1} < 2$ folgt $1.25 < x_{i+2} < 2$;

aus $1.25 < x_{i+2} < 2$ folgt $1.25 < x_{i+3} < 1.64$;

aus $1.25 < x_{i+3} < 1.64$ folgt $1.37 < x_{i+4} < 1.64$;

aus $1.37 < x_{i+4} < 1.64$ folgt $a < 1.37 < x_{i+5} < 1.53 < b$.

Das Iterationsverfahren $x_{i+1} = \dfrac{1}{x_i^2} + 1$ konvergiert daher für alle Startwerte x_0 mit $x_0 > 0$.

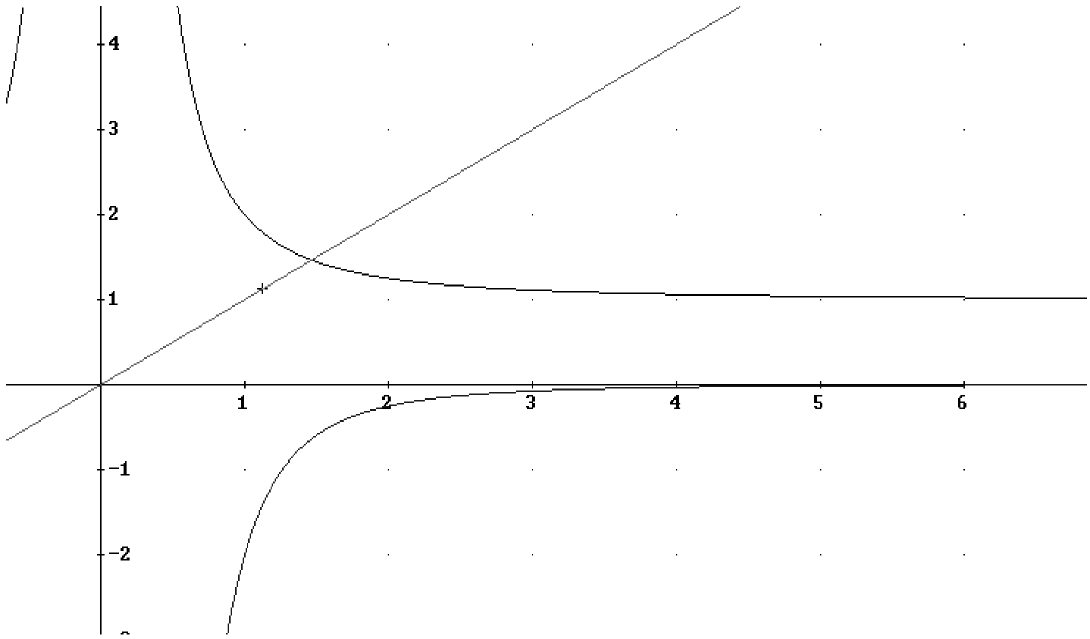


Schaubild der Iterationsfunktion $t(x) = \dfrac{1}{x^2} + 1$, ihrer Ableitungsfunktion $t'(x) = \dfrac{-2}{x^3}$ und der Winkelhalbierenden mit y = x.

Vorgänger-Rechtecke und zugehörige Teilverhältnisse bei Zerlegung mit dem Diagonalen-T

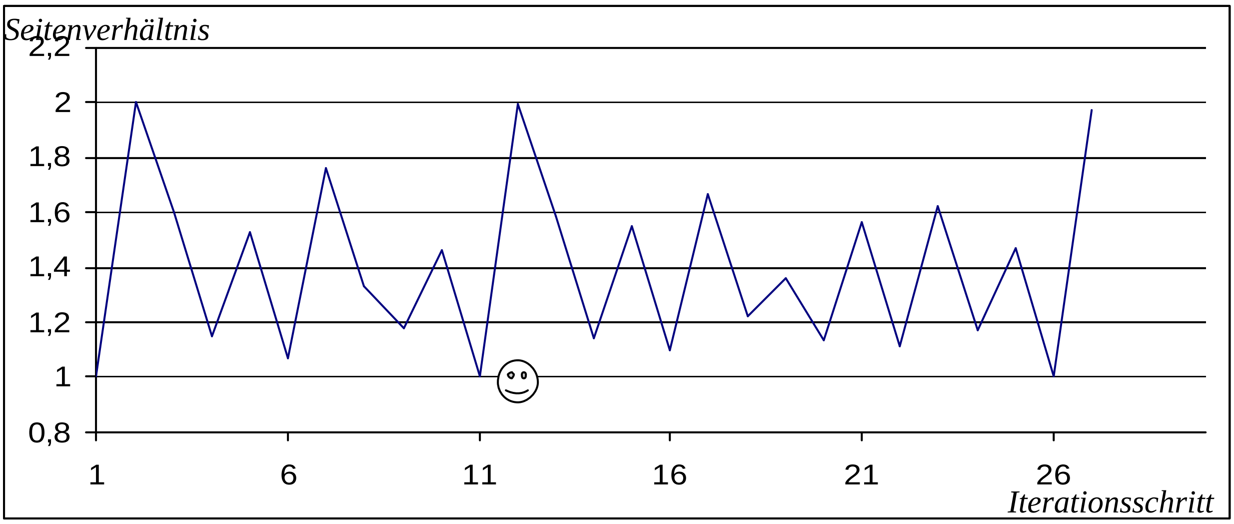
Aus jedem Rechteck mit k >1 entsteht durch die Zerlegung mit dem *' Diagonalen-T '* genau ein Zielrechteck.
Jedes Zielrechteck mit $1 < k \leq 2$ kann aus zwei Ausgangsrechtecken gebildet werden.
(siehe auch: , Berechnung und Existenz des alternativen Vorgängerverhältnisses')

Die Zerlegung durch das 'Diagonalen-T' führt nur zu einem neuen Rechteck, wenn k > 1 ist.

Wird die angegebene Zerlegung auf das jeweils entstandene Rechteck erneut angewendet, d.h. die Beziehung $k' = \dfrac{k^3}{k^2+1}$ iteriert, wobei für $\dfrac{k^3}{k^2+1} < 1$ jeweils mit dem Kehrwert weitergerechnet wird (d.h. $k' = \dfrac{k^2+1}{k^3}$) , so entsteht eine Folge von Rechtecken.

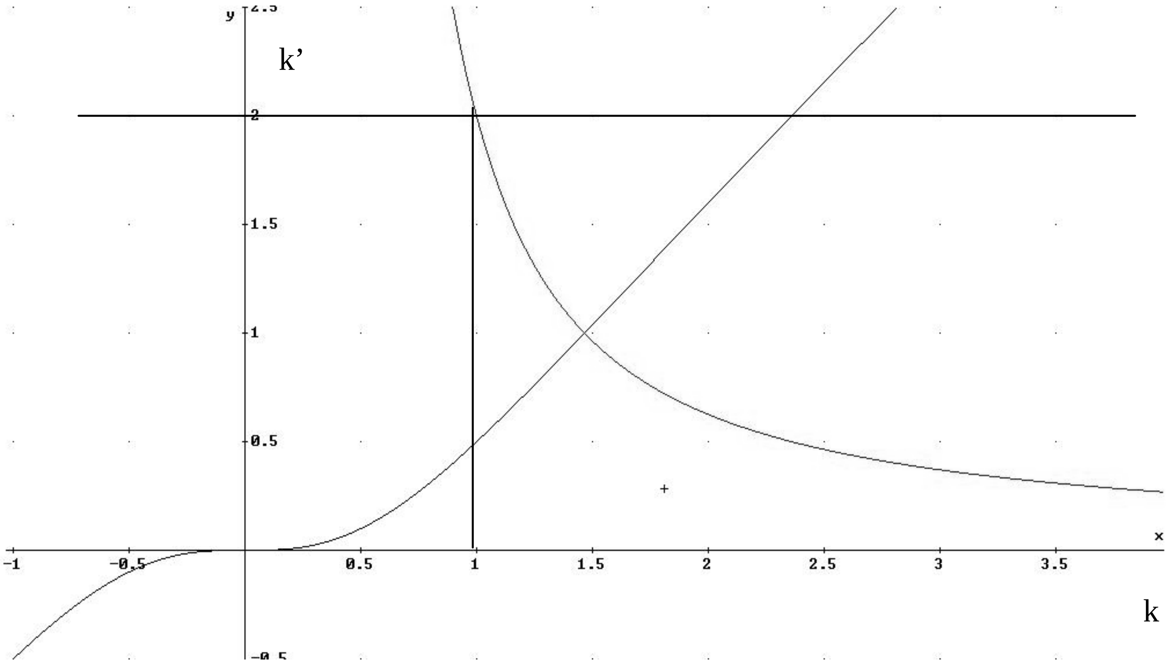
Mit dem Startwert k = 1 ergibt sich die Folge mit den Seitenverhältnissen

1, 2, 1.6., 1.150, 1.525, 1.067, 1.759, 1.330, 1.176, 1.463, 1.0021 ☺, 1.9913, 1.5903, …
(Beim 11. Folgeglied ist also ein 'Fastquadrat' entstanden)



Aufeinanderfolgende Seitenverhältnisse bei Iteration der Zerlegung durch das Diagonalen-T

Die Nachfolgerfunktion lautet: $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+1}, & \text{für } \dfrac{x^3}{x^2+1} \geq 1 \text{ , d.h. } x \geq q \\[2ex] \dfrac{x^2+1}{x^3}, & \text{für } \dfrac{x^3}{x^2+1} < 1 \text{ , d.h. } 1 \leq x < q \end{cases}$$



f ist für $1 < x < q$ monoton fallend und für $x \geq q$ monoton wachsend, da

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2+3}{x^4} < 0 \text{ für } 1 \leq x < q \\[2ex] \dfrac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2} \geq 0 \text{ für } x > q \end{cases}$$

f hat eine Wendestelle in $x = \sqrt{3}$ ($f''(x) = \dfrac{2x \cdot (x^2-3)}{(x^2+1)^3}$) mit der max. Steigung 9/8 .

Da f monoton wachsend ist für $x > q$, hat die Gleichung $k' = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ genau eine reelle Lösung k ,

d.h. es existiert zu jedem Verhältnis k' genau ein Vorgängerverhältnis k mit $k' = \dfrac{k^3}{k^2+1}$;

Der Vorgänger k zu gegebenem k' kann daher aus der Gleichung $k^3 - k'k^2 - k' = 0$ bestimmt werden. Entsprechend gilt für $x < q$ die Gleichung $k'k^3 - k^2 - 1 = 0$.

Berechnung und Existenz des ‚alternativen Vorgängerverhältnisses'

Wenn es zur Gleichung $\frac{1}{k'} = \frac{x^3}{x^2+1}$ (k' > 1) ebenfalls eine Lösung j mit j $\geq$ 1 gibt,

ist auch j ein Vorgänger zum Verhältnis k'.

Zwischen j und k besteht dann die Beziehung $\frac{k^3}{k^2+1} \cdot \frac{j^3}{j^2+1} = 1$ und somit kann das <u>alternative Vorgängerverhältnis</u> j aus der Gleichung $k^3 j^3 - (k^2+1) j^2 - (k^2+1) = 0$ bestimmt werden.

Die Gleichung $\frac{1}{k'} = \frac{x^3}{x^2+1}$ (k' > 1) hat nur für 1< k' $\leq$ 2 eine Lösung **j > 1** .

Begründung: *s.a. Schaubild*

Sei g(x) = $\frac{x^3}{x^2+1}$ $, x > 0$. Wenn k' > 2 ist , dann gilt: $\frac{1}{k'} = \frac{x^3}{x^2+1} < 0.5$.
Aus g(1) = 0.5 und der Monotonie von g folgt , dass g(x) < 0.5 nur möglich ist für x < 1.
Da nur Lösungen x > 1 zugelassen sind, bedeutet dies, dass Verhältnisse k' > 2 kein alternatives zulässiges Vorgängerverhältnis haben.

Beispiele: Zu k' = 2 gehört mit $2k^3 - k^2 - 1 = 0$ der Vorgänger k = 1 und aus $j^3 - 2j^2 - 2 = 0$ die alternative Lösung j = 2.3593

Zu k' = 2.7 gibt es nur den Vorgänger 3.
Die Gleichung $\frac{j^3}{j^2+1} = \frac{1}{2.7}$ führt auf $27j^3 - 10j - 10 = 0$ und liefert mit j = 0.8651 < 1 nur eine nicht zulässige Lösung.

Beispiel für eine Sequenz aufeinanderfolgender Rechtecksverhältnisse bei Zerlegung mit dem ‚Diagonalen-T'

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1.0316 & & 1.1758 & & & & 2.3593 & & 1.1217 & & 1.3477 & & \\
| & & | & & & & | & & | & & | & & \\
1.8802 & \rightarrow & 1.4656 & \rightarrow & \mathbf{1} & \rightarrow & 2 & \rightarrow & 1.6 & \rightarrow & 1.1506 & \rightarrow & ....
\end{array}$$

Sind k und k' aufeinanderfolgende Rechtecksverhältnisse bei Zerlegung mit dem ‚Diagonalen-T', so kann man das Verhältnis $\frac{k'}{k} = r$ betrachten.

Der ‚Formveränderungskoeffizient' r gibt an, wie sich die Form des Rechtecks bei der Zerlegung ändert.
Zu jedem vorgegebenen r mit $\frac{1}{q} < r < 1$ (q = 1.46557) findet man zwei Werte für k.
Begründung:

1) $k' = rk = \frac{k^3}{k^2+1}$ und somit $r = \frac{k^2}{k^2+1}$ oder $k_1 = \sqrt{\frac{r}{1-r}}$

Aus $k \geq q$ folgt $\frac{1}{q} \leq r$. Insgesamt gilt $\frac{1}{q} \leq r < 1$

2) $k' = r\,k = \frac{k^2+1}{k^3}$ und somit $r = \frac{k^2+1}{k^4}$ oder $k_2 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1+4r}}{2r}}$

Aus $1 \leq k \leq q$ folgt insgesamt $\frac{1}{q} < r \leq 2$

Beispiele

r = 0.75	$k_1 = \sqrt{3} \approx 1.732$	$k_1' = 0.75\sqrt{3} \approx 1.299$	$k_2 = \sqrt{2} \approx 1.414$ DIN-A-Format	$k_2' = 0.75\sqrt{2} \approx 1.061$
r = 0.8	$k_1 = 2$	$k_1' = 1.6$	$k_2 \approx 1.3805$	$k_2' \approx 1.1044$
r = 1	$k = \sqrt{j} \approx 1.272$ Phönix-Rechteck	k' = $\sqrt{j} \approx 1.272$ Phönix-Rechteck		
r = 1.5			$k = \sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{3}} \approx 1.1023$	$k' \approx 1.654$
	k = 1 Quadrat	k' = 2		
$r = \frac{1}{q} \approx 0.682$	k = q ≈ 1.466 Präquadrat	k' = 1 Quadrat		
r = 0.847 $r^3 + 4r = 4$	$k_1 = 2.36$; $r = 2/k_1$; $k_1^3 = 2(k_1^2 + 1)$	$k_1' = 2$	$k_2 = 1.351$	$k_2' = 1.145$

Für r = 1 ergibt sich also nur eine Lösung, nämlich das Phönix-Rechteck.

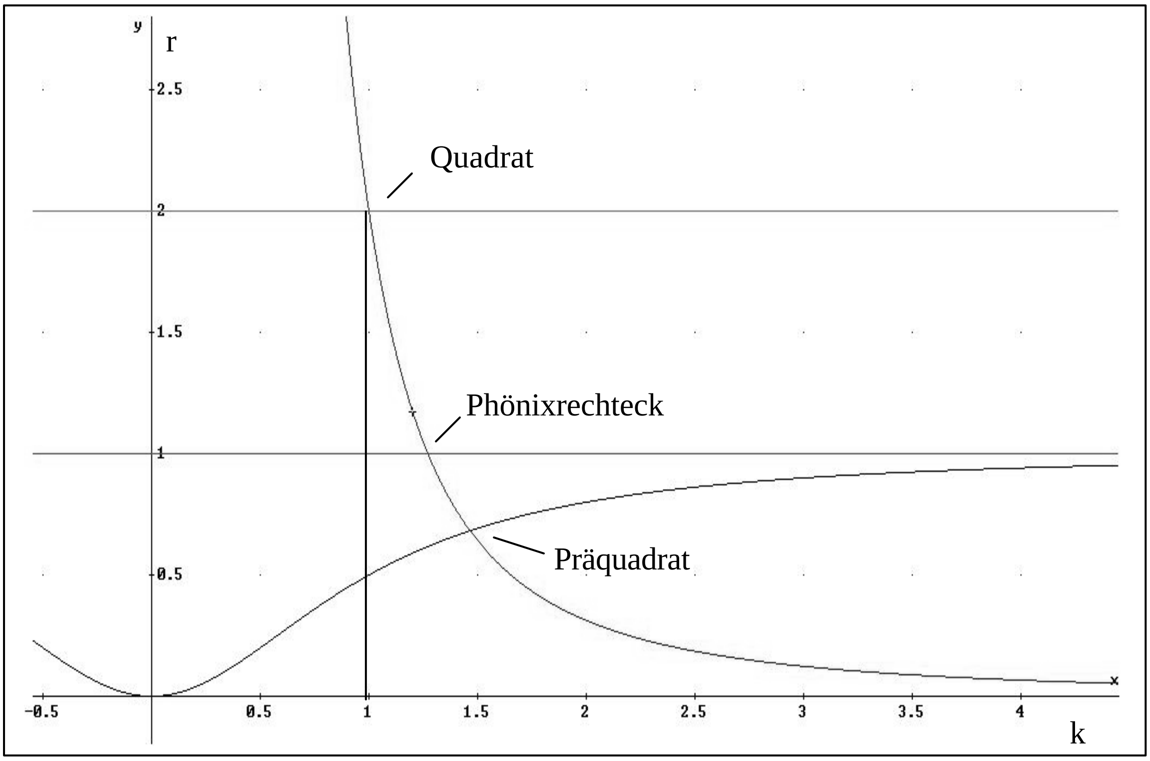
Der Fall $k_1 = k_2$ führt auf die Gleichung $\frac{k^2}{k^2+1} = \frac{k^2+1}{k^4}$ und damit wieder auf $k^3 = k^2 + 1$ mit der Lösung q. Dies ist das schon bekannte Seitenverhältnis aus der 'Quadratur des Rechtecks'.

Da also $r \cdot k = 1$ gilt erfüllt r die Gleichung $r^3 + r = 1$ mit der Lösung r = 1/q.

Kurvenverlauf zum Formveränderungskoeffizient r bei Zerlegung eines Rechtecks durch das Diagonalen-T in Abhängigkeit von k

Es ist $\frac{k'}{k} = r$ und q = 1.46557 (aus $q^3 = q^2 + 1$)

$$r(k) = \begin{cases} \frac{k^2}{k^2+1} & \text{für } k \geq q \\ \frac{k^2+1}{k^4} & \text{für } 1 \leq k < q \end{cases}$$



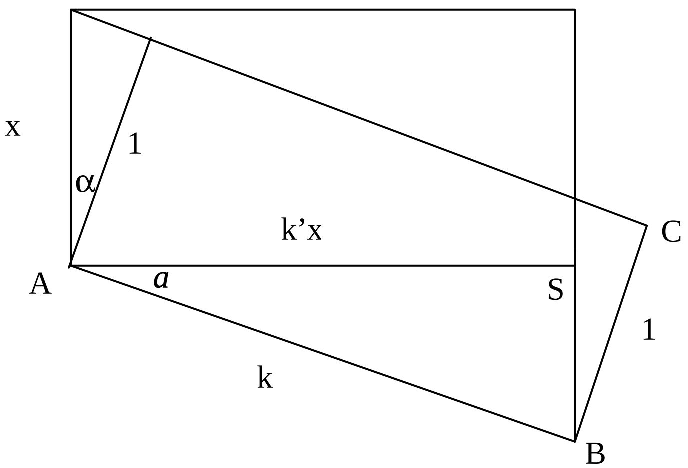
Für die Fragestellung ist von der ‚Hyperbel' also nur der Bereich $1 \leq k < q$ und von der zweiten Kurve der Bereich $k \geq q$ sinnvoll.

Aus beiden Kurven ergibt sich für r der maximale Wertebereich $\frac{1}{q} \leq r \leq 2$

Zerlegungswinkel bei gegebenem Ausgangs- und Zielrechteck

Kann man den Übergang von einem Ausgangsrechteck zu einem Zielrechteck durch verschiedene T-Zerlegungen erreichen?

Verzichtet man auf die Bedingung für das ‚Diagonalen-T' , d.h. $\overline{AS}$ liegt nicht notwendig auf der Diagonalen $\overline{AC}$ und gibt statt dessen jeweils ein Ausgangsverhältnis k und ein Zielverhältnis k' vor, so kann man den Zerlegungswinkel a in Abhängigkeit von k und k' bestimmen.
Die Verwandlung ist für gewisse Werte von k und k' durch zwei verschiedene Zerlegungswinkel zu erreichen, je nachdem ob AS als längere oder kürzere Seite des neuen Rechtecks auftritt.



Die Zerlegung ist nicht für beliebige Werte von k und k' durchführbar.
Bei geeignetem k' existieren zwei Lösungen für die Zerlegung.

I) Aus $\cos\alpha = \frac{k'x}{k}$ und $\cos a = \frac{1}{x}$ folgt $\cos^2 a = \frac{k'}{k}$ und somit $\cos a = \sqrt{\frac{k'}{k}}$

II) Aus $\cos\alpha = \frac{x}{k}$ und $\cos a = \frac{1}{k'x}$ folgt $\cos^2 a = \frac{1}{k \cdot k'}$ und somit $\cos a = \sqrt{\frac{1}{k \cdot k'}}$

Die beiden Fälle liegen ‚symmetrisch' zum Quadratur-Fall k = 1 mit $\cos a = \sqrt{\frac{1}{k}}$

Die neue Rechteckseite kann nicht größer als die durchlaufende Diagonale des alten Rechtecks sein. In diesem Fall ergibt sich das Verhältnis $k' = k + \frac{1}{k}$ da für die Maßzahlen der Seiten s und s' des neuen Rechtecks gilt $s = \sqrt{k^2+1}$ und $s' = \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$

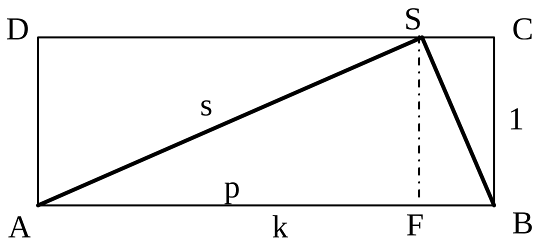
Es gelten folgende Ungleichungen:

	K≤2	k>2
Eine Lösung	$k \le k' \le k + \frac{1}{k}$ mit $\cos a = \sqrt{\frac{1}{k \cdot k'}}$ für den Zerlegungswinkel	$\frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2} < k \le k' \le k + \frac{1}{k}$ mit $\cos a = \sqrt{\frac{1}{k \cdot k'}}$ für den Zerlegungswinkel:
Zwei Lösungen	$1 < k' < k$ Zwei Zerlegungswinkel mit $\cos a = \sqrt{\frac{1}{k \cdot k'}}$ (TypII) und $\cos a = \sqrt{\frac{k'}{k}}$ (Typ I)	$\frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}$ < k' < k (Begründ. siehe unten) Zwei Zerlegungswinkel mit $\cos a = \sqrt{\frac{1}{k \cdot k'}}$ und $\cos a = \sqrt{\frac{k'}{k}}$

Überlegungen zur Ungleichung $\frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}$ < k’ < k

Beim Diagonalen-T entsteht für k > 2 das Rechteck mit $k' = \frac{k^3}{k^2+1}$

Dies ist i.a. nicht das minimale k’ , d.h. das Rechteck hat damit nicht die bestmögliche Annäherung an das Quadrat. Nur für k $\leq$ 2 ist eine Quadratur immer möglich.
Für k > 2 ist das neue Verhältnis k’ minimal, wenn S auf dem Umfang des Rechtecks liegt und die Aufteilung aus 3 ähnlichen Dreiecken besteht.

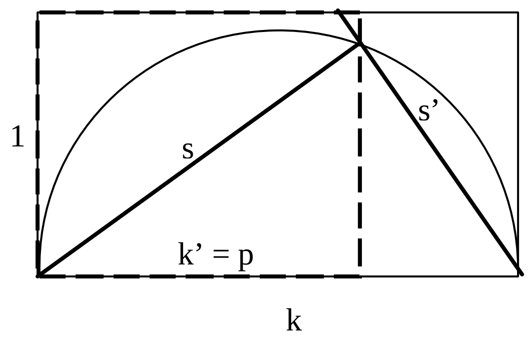


Mit dem Höhensatz gilt: pq =1 und p + q = k ; somit p^2 = kp-1 und $p = \frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}$

Das minimale k’ wird also für $k' = \frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}$ erreicht

Ergänzung:
Allgemein gilt für die Maßzahl von p, wenn p unter der größeren Seite s des neuen Rechtecks mit den Seiten s und s’ liegt:

$s \cdot s' = k$ und $k' = \frac{s}{s'}$ und somit $k' = \frac{s^2}{k}$. Mit dem Kathetensatz $s^2 = p \cdot k$ folgt $k' = p$



Das gestrichelt markierte Rechteck ist ähnlich zum Zielrechteck, welches durch Umlegung aus dem ursprünglichen Rechteck entsteht.

Die Ungleichung $\frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}$ < k ist erfüllt, da $\frac{k}{2} + \frac{\sqrt{k^2-4}}{2} < k \Leftrightarrow \frac{\sqrt{k^2-4}}{2} < \frac{k}{2} \Leftrightarrow k^2 - 4 < k^2 \Leftrightarrow -4 < 0$

Im zur obigen Figur ‚symmetrischen Fall’ für k > 2 durchläuft k’ die Werte von $\frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}$ über k bis $k + \frac{1}{k}$. Es gilt nun $s \cdot s' = k$ und $k' = \frac{s'}{s}$ und somit $k' = \frac{k}{s^2}$.

Mit dem Kathetensatz $s^2 = p \cdot k$ folgt $k' = \frac{1}{p}$

Beispiele zum Zerlegungswinkel α bei gegebenem Ausgangs- und Zielrechteck

Zerlegung mit Diagonalen-T gemäß Typ II

II)	k = 1 Quadrat	k' = 2	$\cos\alpha = \sqrt{0.5}$, $a = 45°$
II)	k = $\sqrt{j}$ Phönixrechteck	k' = $\sqrt{j}$	$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{j}}$ bzw. $\sin\alpha = \frac{1}{j}$; $a = 38.17°$
I) oder II)	k = q Präaquadrat	k' = 1	$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{q}}$, $a = 34.31°$
II)	k = $\sqrt{2}$ DIN-A-Format	k' = $0.75\sqrt{2} \approx 1.061$ siehe unten	$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1.5}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $a = 35.26°$
I)	k = 2	k' = 1.6 siehe unten	$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1.6}{2}}$, $a = 26.56°$

Das Diagonalen-T führt nur auf Typ1), wenn gilt $1 \le \frac{k^3}{k^2+1}$, d.h. für $k \ge q$

Zerlegung mit beliebigem Winkel α gemäß Typ I) bzw Typ II)

I)	k = $\sqrt{2}$	k' = $0.75\sqrt{2}$ siehe oben	$\cos\alpha = \sqrt{\frac{0.75\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $a \approx 30°$
II)	k = $\sqrt{2}$	k' = $\sqrt{2}$	$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a \approx 45°$
II)	k = $\sqrt{2}$	k' = 2 d.h. r = $\sqrt{2}$ Konstruktion |AF| = 0.5	$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt[4]{2}$, $a \approx 53.5°$
II)	k allgemein	k' = k , Phönix-Rechteck ohne Diagonale	$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{k}$
II)	k = 2	k' = 1.6 siehe oben	$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{3.2}}$, $a \approx 56.0°$
I)	k = 2 Seiten 2; 1	k' = 9/8 Seiten: 3/2 ; 4/3	$\cos\alpha = \sqrt{\frac{9}{16}}$, $a \approx 41.4°$
I)	k = 9/8 Seiten: 3/2 ; 4/3	k' = 289/288 = 1.0034 Seiten: 17/12 u. 24/17	$\cos\alpha = \sqrt{\frac{2312}{2592}}$, $a \approx 19.2°$

Zwei Schritte beim Heronverfahren

Veranschaulichung des Heronverfahrens zur Berechnung von $\sqrt{2}$ durch dreiteilige Rechteckzerlegungen

Beginnt man mit dem Startwert $x_1 = 1$ so gilt:

$$y_1 = \frac{2}{x_1} = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + y_1) = \frac{1}{2}(x_1 + \frac{2}{x_1}) = \frac{3}{2}$$

$$y_2 = \frac{2}{x_2} = \frac{4}{3} \quad \text{und} \quad x_3 = \frac{1}{2}(x_2 + y_2) = \frac{1}{2}(x_2 + \frac{2}{x_2}) = \frac{17}{12}$$

$$y_3 = \frac{2}{x_3} = \frac{24}{17} \quad \text{und} \quad x_4 = \frac{1}{2}(x_3 + y_3) = \frac{1}{2}(x_3 + \frac{2}{x_3}) = \frac{577}{408}$$

Das Näherungsverfahren kann durch aufeinanderfolgende Rechtecke veranschaulicht werden, die sich in jedem Schritt der Quadratform weiter annähern.

Für die Seitenverhältnisse der aufeinanderfolgenden Rechtecke gilt:

$$k_1 = \frac{y_1}{x_1} = 2 \quad , \; k_2 = \frac{x_2}{y_2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{8} \qquad , \; k_3 = \frac{x_3}{y_3} = \frac{17}{12} \cdot \frac{17}{24} = \frac{289}{288} \approx 1.003$$

Im 3.Schritt ist also schon eine gute Annäherung an die Quadratform erreicht.

Zur Berechnung eines geeigneten Zerlegungswinkels verwenden die Formel $\cos a = \sqrt{\frac{k'}{k}}$

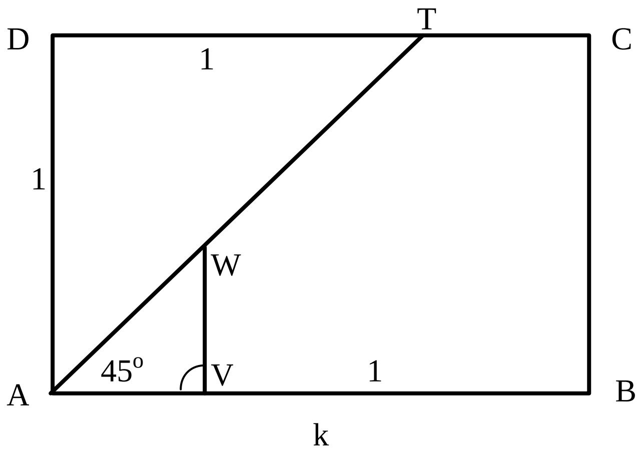
Erster Zerlegungswinkel $\quad \cos a = \sqrt{\frac{9}{8 \cdot 2}} = \frac{3}{4} \quad \textit{und} \quad a_1 \approx 41.41°$

Zweiter Zerlegungswinkel $\quad \cos a = \sqrt{\frac{289}{288} \cdot \frac{8}{9}} = \sqrt{\frac{2312}{2592}} \quad \textit{und} \quad a_2 \approx 19.19°$

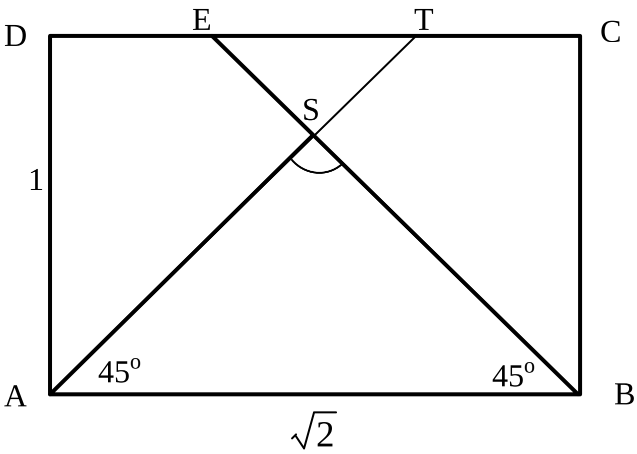
Mit der alternativen Formel $\cos a = \sqrt{\frac{1}{k \cdot k'}}$ ergeben sich als zugehörige Zerlegungswinkel $\overline{a_1} \approx 48.19$ *und* $\overline{a_2} \approx 19.75°$.

Bei nebenstehender Verschiebungszerlegung für ein Phönixrechteck gilt

|DT| = |AD| = |VB| = 1LE.



Untersucht man die Zerlegung für den Fall, dass $k = \sqrt{2}$ ist, so zeigt sich, dass die T-Zerlegung und die Verschiebungszerlegung für ein Phönixrechteck sich hier ergänzen zu einer 4-Teilung des Rechtecks.



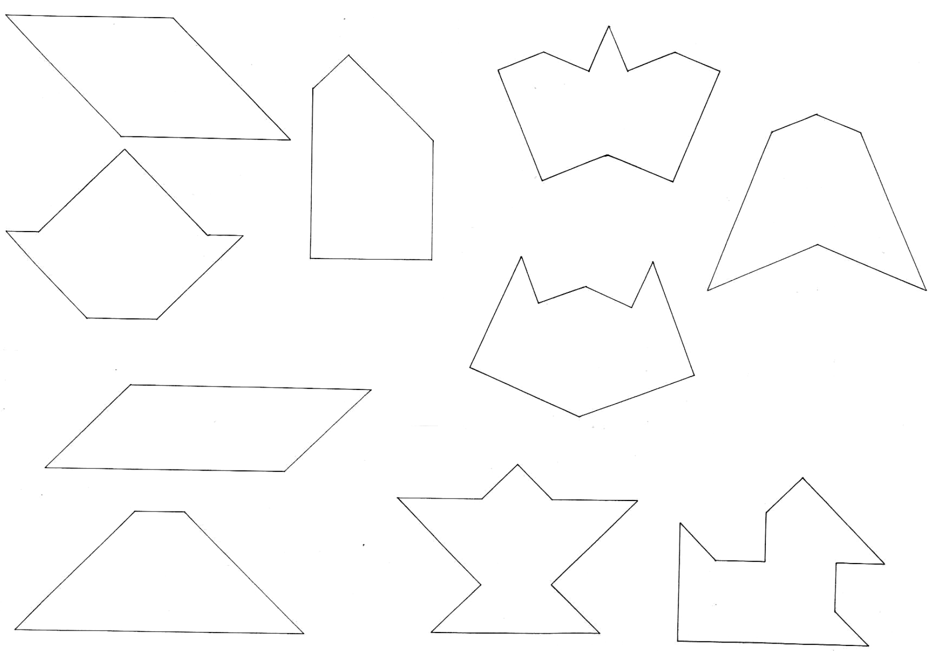
Es gilt

|AS| = 1

Die Dreiecke ABS und ATD sind kongruent mit der Hypotenusenlänge $\sqrt{2}$.

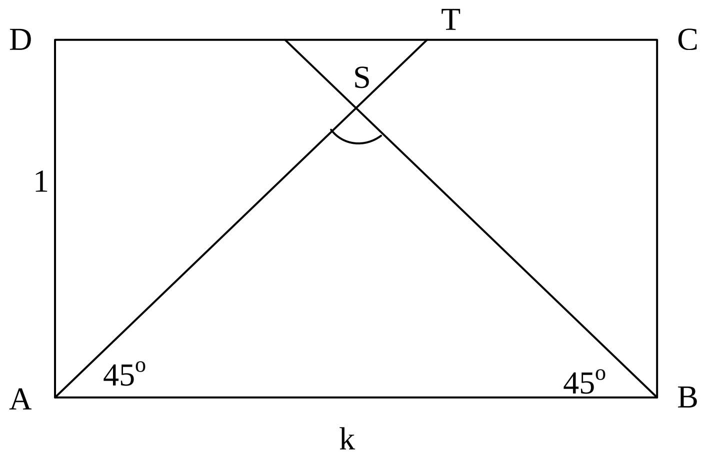
Das Dreieck EST stimmt mit dem Dreieck AVW aus obiger Zerlegung überein.

Die besondere Situation bei dieser Zerlegung eines Rechtecks im DIN-A-Format ermöglicht es, aus den 4 Teilen ein einfaches aber relativ ergiebiges Legespiel zu gestalten.



Flächeninhaltsfunktionen zu einer elementaren Vierteilung des Rechtecks

Teilt man das Rechteck mit dem Seitenverhältnis k, $1 \le k \le 2$ durch zwei überkreuzende $45°$-Linien wie in nebenstehender Skizze, so entstehen 4 Teilflächen. Die Größe dieser Teilflächen kann in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis k des Rechtecks angegeben und mit einfachen quadratischen Funktionen veranschaulicht werden.



Berechnung der Teilflächen für die Seitenlängen 1LE und k LE des Rechtecks

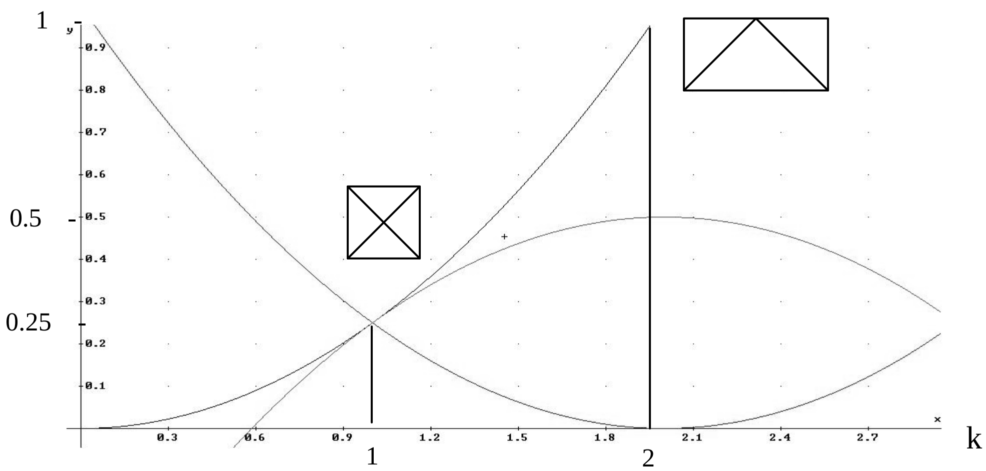
Rechtecksfläche k FE ; Dreieck ATD $\frac{1}{2}$ FE ; Dreieck ATB $\frac{k}{2}$ FE

‚Großes Dreieck' ASB $\frac{1}{2}\,k\,\frac{k}{2} = \frac{k^2}{4}$, also $\frac{k^2}{4}$ FE ;

Sehnenviereck $k - \frac{1}{2} - \frac{k^2}{4}$, also $k - \frac{1}{2} - \frac{k^2}{4}$ FE

Kleines Dreieck $\frac{1}{2} - (k - \frac{1}{2} - \frac{k^2}{4}) = \frac{(k-2)^2}{4}$, also $\frac{k^2}{4} - k + 1$ FE

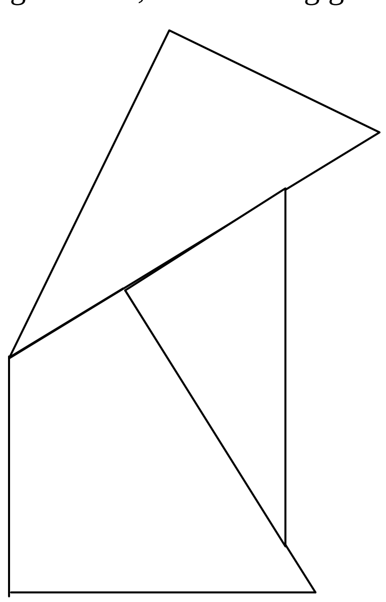
Die Kurven zu $y = \frac{k^2}{4}$; $y = k - \frac{1}{2} - \frac{k^2}{4}$ *und zu* $y = \frac{k^2}{4} - k + 1$ haben den Punkt $P(1/\frac{1}{4})$ gemeinsam für k = 1, d.h. beim Quadrat.



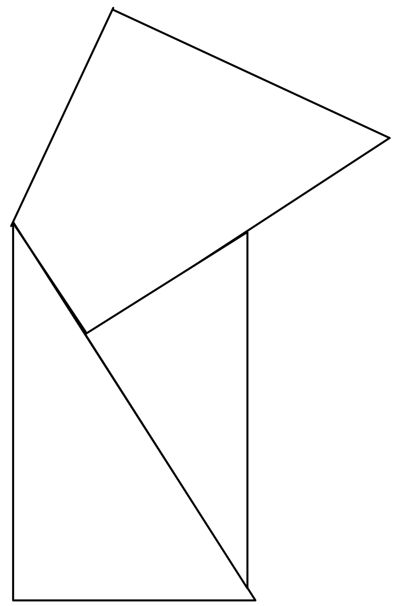
Entsprechendes gilt für die Kurven zu den Flächenanteilen mit y = k/4 ; y = 1 – 0.5/k – k/4 und y = k/4 – 1 + 1/k

Ergebnisse zu weiteren Fragestellungen

Aus den 3 Teilen der Diagonalen-T-Zerlegung können auch nicht konvexe Figuren, wie die nebenstehende Figur1 und Figur2 gelegt werden. Die Gestalt ist vom Seitenverhältnis des Ausgangsrechts k, k > 1 abhängig.



Figur1

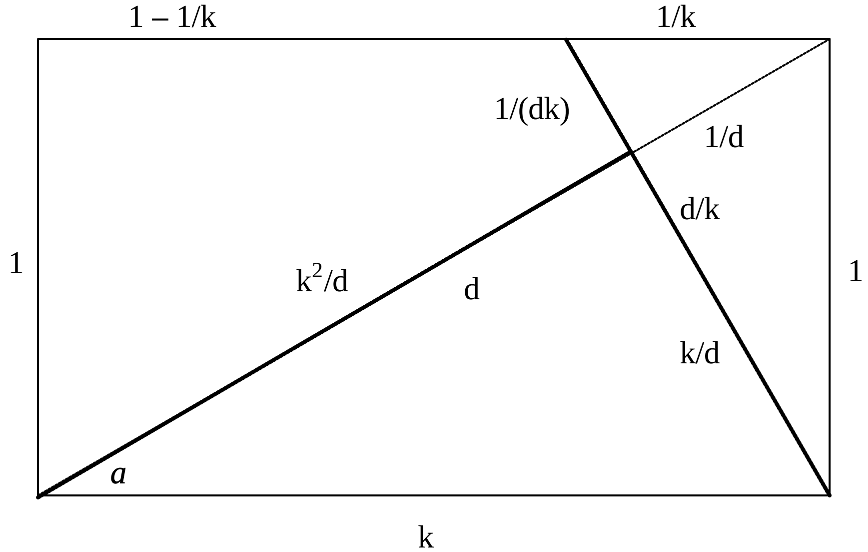


Figur2

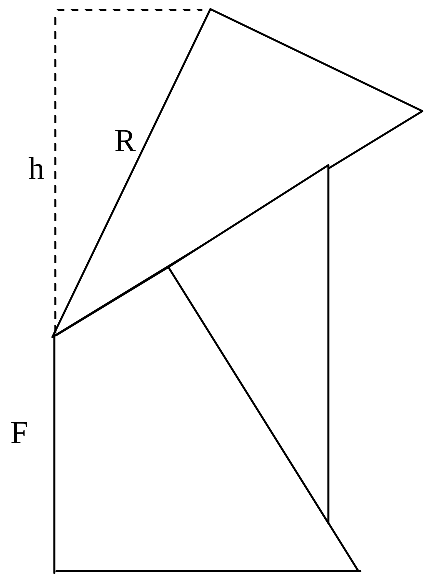
Fragestellungen:

a) Bestimme die Höhe der beiden Figuren.
b) Für welche Werte von k sind beide Figuren gleich hoch?
c) Für welche k haben Figur1 bzw. Figur2 eine ‚Zehe' ?

Die Längen der Schnittlinien können in Abhängikeit von k und d (mit d = $\sqrt{k^2+1}$) angeben werden. (bei einer Seitenlänge 1LE)



Bestimme die Gesamthöhe H der beiden Figuren mit Rückenlänge R und Fußlänge F



Für die ‚Rückenhöhe' h gilt:

$$h = R\cdot\cos(90° - 2a) = R\cdot\sin 2a = R\cdot 2\sin a\cos a$$

Wegen $\sin a = \dfrac{1}{d}$ und $\cos a = \dfrac{k}{d}$ folgt $h = 2R\cdot\dfrac{k}{k^2+1}$

Gesamthöhe: H = F + h

Figur1) Fußlänge k-1/k ; Rückenlänge k^2 /d und somit $H_1 = k - \dfrac{1}{k} + 2\dfrac{k^3}{(k^2+1)\sqrt{k^2+1}}$

Figur2) Fußlänge k^2/d ; Rückenlänge k-1/k und somit $H_2 = \dfrac{k^2}{\sqrt{k^2+1}} + 2\dfrac{k^2-1}{k^2+1}$

Für welches k gilt $H_1 = H_2$?

$$k - \frac{1}{k} + 2\frac{k^3}{(k^2+1)\sqrt{k^2+1}} = \frac{k^2}{\sqrt{k^2+1}} + 2\frac{k^2-1}{k^2+1}$$

Mit k = x führt dies auf die Gleichung $-x^8 + 4x^7 - 7x^6 + 8x^5 - 6x^4 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$

Nach Polynomdivision durch die 4-fache Nullstelle 1 ergibt sich die Gleichung $-x^4 - x^2 + 1 = 0$ mit den Lösungen x = $\pm\sqrt{j-1}$. Somit gibt es kein k > 1 mit gleicher Gesamthöhe beider Figuren und Figur2 ist für k> 1 immer größer als Figur1.

Auch ohne CAS-System kann die Ausgangsgleichung für k > 1 wie folgt vereinfacht werden:

$$\frac{(k^2-1)(k^2+1)\sqrt{k^2+1} + 2k^4}{k(k^2+1)\sqrt{k^2+1}} = \frac{k^3(k^2+1) + 2(k^2-1)\cdot k\sqrt{k^2+1}}{k(k^2+1)\sqrt{k^2+1}} \quad \text{führt auf}$$

$(k^2-1)\sqrt{k^2+1}\cdot(k^2+1-2k) = k^3(k^2+1-2k)$, somit $(k^2-1)^2(k^2+1) = k^6$, also $(k^2-1)(k^4-1) = k^6$ und schließlich $k^4 + k^2 - 1 = 0$.

Für welche k haben die beiden Figuren ‚Zehen' ?

Bei **Figur1** muss die Bedingung $\frac{k^2}{d} > 1$ erfüllt sein.
Dies ergibt $k^4 > k^2 + 1$ und somit $k > \sqrt{j}$,

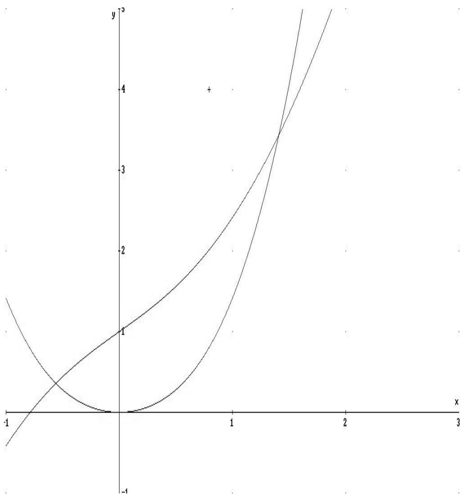
Es gilt also: Figur1 hat ‚Zehen', wenn das Seitenverhältnis des Ausgangsrechtecks größer ist, als das Seitenverhältnis beim Phönixrechteck.

Bei **Figur2** muss die Bedingung $\frac{1}{dk} + 1 < k$ gelten.

Die Ungleichung $1 + dk < k^2 d$ führt mit k = x und d = $\sqrt{x^2+1}$ auf die Untersuchung der Gleichung

$\sqrt{x^2+1}\,(x^2 - x) = 1$ und damit auf $x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + x^2 - 1 = 0$

Mit dem Newtonverfahren ergibt sich die positive Lösung x = 1.4101905…,
d.h. für k > 1.410… hat Figur2 eine Zehe.



Schaubilder zu den Funktionsgleichungen

$y = 1 + x\sqrt{x^2+1}$ *und* $y = x^2\sqrt{x^2+1}$

Beispiel:
Für k = $\sqrt{2}$ ergibt sich die Zehenlänge $(k - \frac{1}{dk} - 1)\cos(90° - a) = (\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{6}} - 1)\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.0034$

Beim Ausgangsrechteck im DINA5-Format mit der Seitenlänge 14.87 ergibt dies eine Zehenlänge von ca. 0.5mm.

Prof. Hans-Dieter Baumgärtner, Staatliches Seminar für Schulpädagogik (Gymnasien)
Flandernstr.101 , 73732 Esslingen ; hadi@bauminfo.de ; www.pihalbe.de