

## Lernziele im Mathematikunterricht:

**Wer's weiß fragt - wer's nicht weiß, soll antworten!** ( *Gaudig, 1906, zit. nach L. Führer* )

Wir unterscheiden zwischen Lernzielen, Lerninhalten und Lernprozessen.

„Bildung ist das, was übrig bleibt, wenn ich vergessen habe, was ich gelernt habe.“

Lehren ist handeln das Lernen auslöst. Wie werden aus den Lehrzielen die Lernziele?

Lernen bedeutet eine langfristige Änderung des Verhaltenspotentials, die nicht durch biologische Veränderungen entstanden ist.

(Operationalisierte) Lernziele beschreiben das Verhalten des Lernenden, das jeweils als Zeichen für erfolgreiches Lernen gilt.

## Unterschiedliche Ordnungsverfahren für allgemeine Lernziele:

Kognitive, affektive, psychomotorische Fähigkeiten

Kenntnisse, Fertigkeiten, Verhalten

Kenntnisse, Begreifen und Anwenden, Analyse und Synthese

Theorie, Algorithmen, Problemlösung, Logische Zusammenhänge, Kommunikation

Kognitive Fähigkeiten, kognitive Strategien, Einstellungen

Probleme mit Lernzielen:

finden, begründen, formulieren, ausgestalten, umsetzen, evaluieren, kontrollieren

Allgemeine Lernziele (*z.B. nach Winter*)

- Kreativität
- rationale Argumentation
- Mathematisieren u. Anwenden
- Formale Fertigkeiten (Algorithmus, Kalkül)

Beispiele für Lernziele zu den Bereichen *(nach Dormolen)*  
Theorie, Algorithmen, Problemlösung,  
Logische Zusammenhänge, Kommunikation

**Langfristige Lernziele**

Definitionen kennen

Figuren unterscheiden können

Zusammenhänge zwischen Begriffen erkennen können

Eine neue Anwendung eines Begriffes oder Satzes finden können

Einen Begriff oder eine Eigenschaft in einer anderen Terminologie formulieren können.

Methoden zur Lösung zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten nennen können.

Berechnungen mittels eines auswendig gelernten Algorithmus ausführen können

Grundkonstruktionen beherrschen

Die Richtigkeit eines Algorithmus nachweisen können.

Schlüsse aus einem Sonderfall ziehen können, wenn der allgemeine Fall bekannt ist.

Satz und Definition unterscheiden können.

Die formal-logische Struktur eines Beweises darlegen können.

Wissen, wo man Informationen findet.

Regeln für die Niederschrift kennen.

Für die Ausführung notwendige Konventionen kennen

***Kurzfristige Lernziele***

*Definition eines Parallelogramms kennen.*

*Den Unterschied zwischen Quadrat und Rechteck nennen können.*

*Wissen, wie die Fläche eines Rechtecks mit der Fläche eines allgemeinen Parallelogramms zusammenhängt.*

*Mit Hilfe der Definition des Riemann-Integrals eine Definition der Bogenlänge einer Kurve geben können.*

*Die Lösung eines Gleichungssystems von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten durch Mengen beschreiben können.*

*Zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten lösen können.*

*Ganzrationale Funktionen integrieren können.*

*Einen Winkel halbieren können.*

*Beweisen können, dass der Algorithmus der Division mit Rest richtig ist.*

*Aus Parallelogrammeigenschaften Rechteckeeigenschaften gewinnen*

*Den prinzipiellen Unterschied zwischen  $a^4 = a a a a$  und  $a^7 = a^4 a^3$  nennen können.*

*Bei einem fehlerhaften angegebenen Gedankengang sagen können, warum der falsch ist.*

*Wissen, dass hinten im Schulbuch ein Index ist.*

*Wissen, wie man den Beweis eines Satzes systematisch niederschreibt.*

*Wissen, welche Klammern weggelassen werden können, und welche nicht.*

## Probleme bei der Erstellung von Lernzielen (z.B. nach H.J.Claus)

Formulierungsproblem: Welche Lernzielformulierung erlaubt eine Überprüfung des Lernerfolges?  
(incl. Angabe der Hilfsmittel)

Niveauprobem: Wie können Lernziele Qualitätskategorien eingestuft werden?

Kontrollproblem: Wie kann Erfolg kontrolliert werden?

Berechtigungsproblem: Wer darf Lernziele formulieren?  
(Lehrer, Fachkonferenz, Experten (Wissenschaftler), Schulbehörde, Eltern, Schüler, Ministerium, Politiker, Öffentlichkeit, Schulbuchautoren, -verlage)

Lernzielfindungsproblem: Nach welchen Kriterien können Lernziele aufgestellt werden?  
Durch a) Analyse des 'tertiären Bereichs'  
b) Phänomenologische Analyse mathemat. Grundtätigkeiten  
c) Psychologische Analyse mathematischer Fähigkeiten

## Allgemeine Lernziele (z.B. nach Tietze)

Obere Komplexitätsebene:

Mathematisieren; Argumentieren und Begründen;  
Heuristisches Arbeiten; Lokales und globales Ordnen;

Untere Komplexitätsebene:

Analysieren, Synthetisieren;  
Generalisieren, Spezialisieren, Abstrahieren, Konkretisieren, Klassifizieren;  
Strukturieren, Analogisieren;  
Repräsentieren: Enaktivieren, Ikonisieren, Verbalisieren, Formalisieren

## Vergleich von inhaltlich verschiedenen Lernzielen durch 'Lernzieltaxonomien'

Einordnung in Niveau-Kategorien (z.B. nach Bloom oder Wilson)

**Kenntnisse:** Kenntnisse von konkreter Einzelheiten und Terminologie,  
Fähigkeit Algorithmen auszuführen

**Verstehen:** Übertragung, Interpretation, Extrapolation  
d.h. Fähigkeit Sachverhalte umzuformulieren, zu erläutern, zu verallgemeinern

**Anwendung** Fähigkeit, Routineaufgaben zu lösen, Vergleiche durchzuführen  
Daten zu analysieren, Muster sowie Isomorphien und Symmetrien zu erkennen

**Analyse:** Identifizierung von Bestandteilen, Analyse von Beziehungen,  
Analyse von Strukturprinzipien d.h. Fähigkeit, Nichtroutine-Aufgaben zu lösen,  
Beziehungen zu entdecken, Beweise zu führen, Beweise zu beurteilen,  
Verallgemeinerungen zu formulieren und zu begründen.

**Synthese:** Herstellen einer einheitlichen Beschreibung; Entwicklung eines Ablaufplanes;

**Bewertung:** Beurteilung nach inneren Kriterien  
(Logische Richtigkeit; Konsistenz; gegebene Kriterien)  
Beurteilung nach äußeren Kriterien  
(nach eigenen Kriterien;  
in größeren Zusammenhängen;  
in komplexen oder widersprüchlichen Situationen)

## Fachspezifische Taxonomie

*SMSG* ( School Mathematics Study Group)

Wissen; Übersetzen; Manipulieren; Auswählen; Analysieren; Synthetisieren; Beurteilen

*Fischer, Glück und Schmid*

Kennen, Formulieren, Verstehen, Problemlösen, Synthetisieren

## Operationalisierung von Lernzielen: *(nach Christmann)*

### a) Angabe des Endverhaltens;

Verbale Beschreibung von Lernzielen

Präzisierung durch Aufgabenbeschreibung

Präzisierende Hinweise durch Aufgabenbeispiele

### b) Beschreibung der erlaubten Hilfsmittel;

Präzisierung durch Kataloge von Kontrollaufgaben

### c) Festlegung der Grenze erforderlichen Leistungsgrenzen;

Bewertungsrichtlinien

### d) Implizite Operationalisierung von Lernzielen

Konkrete Unterrichtsmodelle

Schulbuchtexte

# Konzepte (Grundideen) des Mathematikunterrichtes

## **Funktionale Variation** statischer Beziehungen, Konfigurationen und Situationen

Variablenbegriffe, Formelumstellungen, Termumformungen, funktionales Denken, Funktionsbegriff, Stetigkeit und Kausalität, operatives Prinzip, Wenn-dann-Sätze

## **Induktion**

Induktive Begriffs- und Lehrsatzbildung, experimentelle Mathematik, 'unvollständige' im Vergleich zur vollständigen Induktion, Gesetze der großen Zahl

## **Approximation**

Messen, Situationsgemäße Genauigkeit, Schätzen, Überschlagen, Exaktifizierung von Begriffen u. Sätzen u. Begründungen, Optimierung, Linearisierung, Streumaße, Modellierung

## **Algorithmisierung**

Vergegenständlichung von Rechenverfahren, Handlungssequenzen oder Gedankenketten in Formeln oder Rezepten oder Konstruktionsbeschreibungen; Iteration und Rekursion

## **Invarianz**

räumliche Formen und Strukturen, unvollständige aber typisierende Beschreibung von Objekten durch klassenbildende Eigenschaften, Formelsprache zur synchronen Behandlung vieler Fälle, Strukturbegriffe, strukturerhaltende Abbildungen, Symmetrie

## **Symmetrie / Symmetrisierung**

Kommutativität, Strukturbegriffe, räumliche Beziehungen, heuristische Strategien, Mittelwerte, Invarianz, Ästhetik,

## **Kontrolle**

Nachprüfbarkeit von Behauptungen und Ergebnissen, Legitimierung erratener Größen, Stabilität, Fehlerabschätzungen, Begründung und Kritik

## 'Lernziel-Denken' - Pro und Contra

Geistige 'Quellen' des Denkens in 'Lernzielen':

Lerntheoretische Didaktik, Curriculum-Theorie, Behaviorismus

Pro: Verantwortliche Unterrichtsführung setzt eine sorgfältige Reflexion der in den Unterricht eingehenden Zielsetzungen voraus.  
Professionalität des Unterrichtens verlangt nachvollziehbare Planungsaktivitäten.  
Möglichst transparente und präzise Festlegung des Unterrichtsziels.  
Eine nachvollziehbare (zweckrationale) Zuordnung von Inhalten, Methoden, Medien ist möglich.  
Unterrichtserfolg wird in Teilen planbar und führt zur Effektivitätssteigerung des Lehr- und Lernvorganges.  
Eine Evaluation und Kontrolle der Zielerreichung ist möglich.

Kritik:

Die Operationalisierung von Lernzielen unterstellt den konditionierbaren und manipulierbaren Schüler.  
Einschränkung der Freiheit, Flexibilität und Spontaneität von Lehrern und Schülern  
Das Recht auf Fehler, Umwege und Einfälle wird eingeschränkt.  
Kaum 'Mitbestimmung' durch den Lernenden  
Vernachlässigung des Unterrichtsprozesses und der Wechselwirkungen zwischen Ziel-, Inhalt und Methodenentscheidungen.  
Überschätzung der Voraussagbarkeit von Unterrichtsverläufen und Lernergebnissen.  
Oberflächliche Orientierung an abprüfaren Verhaltensänderungen.  
Einschränkung der Differenzierungsmöglichkeiten.  
Behinderung offener Unterrichtsformen.

Kritik der Kritik:

Man kann seinen Weg nur sinnvoll, flexibel und situationsgemäß korrigieren, wenn man sein Ziel kennt!

## Beispiele zur Beschreibung von Lernzielen : Der Schüler soll ...

- von ... auf schließen können
- die Aufgabe ... lösen (bearbeiten) können
- aus ... Begriff (Regel, Satz , Formel) herleiten können
- Begriff (Regel, Satz , Formel), .. richtig anwenden können
- lernen, Vermutungen über ... aufzustellen
- die Vermutung ... überprüfen zu können
- zwischen ... und ... unterscheiden können
- am Beispiel ... das Gesetz ... aufzeigen können
- eine Begründung zu ... geben können
- eine Lösung von ... berechnen (bestimmen) können
- Kenntnisse zu ... auf ... übertragen können
- abschätzen können, ob ...
- Eigenschaften von ... bestimmen (nennen, benennen) können
- erklären können, wie (dass, warum, ) ...
- die Form .... in die Form ... umwandeln können
- die Begründung für ... geben (nachvollziehen, darstellen)
- die Gründe für ... zusammenfassen (hinterfragen) können
- eine Formel (Gleichung, Term) aufstellen können
- einen Überblick zu ... geben können
- (Sonder) Fälle zu ... sicher beherrschen (einordnen) können
- zur Argumentationsführung in der Frage ... fähig sein
- eine Argumentationskette zur Frage ... aufbauen können
- seine Lösungsansätze in der Gruppe vertreten können
- seine Überlegungen ( mit Hilfsmittel ...) vor der Klasse (in der Gruppe) darlegen können
- eine Zusammenfassung (wieder-) geben können
- das Verfahren ... selbständig ( im Team, mit Hilfe von ...) durchführen können
- formulieren (darstellen) können, warum ( wie, dass, ...) ...
- Fragen (Antworten) zu ... formulieren können
- verschiedene Fälle zu ... analysieren können
- im Umgang mit ... vertraut ( gewandt, sicher) werden
- Fertigkeiten im Umgang mit ... verbessern (festigen, erweitern)
- Routine beim Lösen der Aufgabe ... gewinnen
- Selbständigkeit im Umgang mit ... erreichen
- die Problemstellung ... beschreiben können
- die Lösungswege ... vergleichen können
- das ... freihändig (geschickt, mit Hilfe von ...) zeichnen (skizzieren) können
- eine Hilfsfigur zu ... anlegen (beschriften) können
- eine saubere Darstellung geben können
- mit ... sicher umgehen können
- das Hilfsmittel ... bei der Bearbeitung von ... einsetzen können
- einen Beweis (Nachweis) zum Satz ( zur Aussage)... führen können ;
- Experimente zum ... ausführen ( protokollieren, beurteilen) können
- den Begriff ... kennen
- Interesse an der Fragestellung ... gewinnen
- den Sachverhalt ... untersuchen können
- erkennen, wie (dass, warum, ) ...
- sich darüber bewusst werden, dass ...
- wissen, dass ... ; wissen, was man unter ... versteht
- einsehen, dass ... ; Einsicht gewinnen in ...
- eine Vorstellung von ... haben (gewinnen )

Problematische Beispiele zu 'operationalisierten' Lernzielen:

Berechnung eines minimalen Oberflächeninhaltes  
Extremwertaufgabe mit allgemeiner Lösung bearbeiten  
Auf Randextrema wird in einer anderen Stunde eingegangen  
Die Möglichkeit von Polstellen erahnen können  
Übungen zu Lösung quadratischer Gleichungen  
Die Freude an einer sauberen Darstellung wecken.  
Einen Einblick bekommen in die Symmetrie von Funktionen  
Vertiefung der Rechengesetze betrachten

Operationalisierung des Lernzielbegriffes:

Geeignete Verben	ungeeignete Verben
schreiben	wissen
auswendig hersagen	verstehen
identifizieren	erahnen
unterscheiden	zu würdigen wissen
vergleichen	vertrauen

Probleme:

- Problem 'operationalisierter' Lernziele im affektiven Bereich
- Unterscheidung zwischen Lerninhalten und Lernzielen
- Formulierung von Lernzielen
- Zuordnungen zwischen langfristigen und kurzfristigen Lernzielen
- Ableitung von Feinlernzielen aus Groblernzielen
- Zusammenhang zwischen Lernzielen und Lerninhalten
- Beziehungen zwischen Lehrplan und Lernzielen
- Akzeptanz / Nichtakzeptanz von Lernzielen bei Lehrer / Schüler
- Wie werden aus den Lehrzielen die Lernziele (oder umgekehrt ??)
- Lernziel angemessene Methodenwahl

Fragen:

Was sind Lernziele?  
Woher kommen die Lernziele?  
In welchem bereichen gibt es Lernziele?  
Auf welchen Niveaus gibt es Lernziele?  
Wie werden Lernziele operationalisiert?  
Was spricht für / gegen Denken in 'operationalisierten Lernzielen' ?  
Welche Beziehungen bestehen zwischen Methoden und Lernzielen?  
Welche Beziehungen bestehen zwischen Lehrplan ( Bildung) und Lernzielen?

