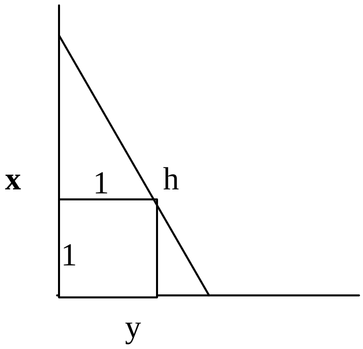
Leiterproblem

Eine Leiter der Länge h lehnt an einer Wand vor der ein würfelförmiger Kasten steht.
Bestimme die Höhe x , bei der die Leiter an der Mauer anlehnt.



Bemerkung: *Durch die Länge h ist die Position der Leiter bis auf Vertauschung von x und y eindeutig bestimmt.*

Es gilt mit Pythagoras $\mathbf{x^2 + y^2 = h^2}$ und

mit Strahlensatz $\dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} = \dfrac{\mathbf{x - 1}}{\mathbf{1}}$ und somit $x + y = yx$ bzw. $y = \dfrac{x}{x-1}$ oder $x + y = \dfrac{x^2}{x-1}$

Daraus folgt $(x + y)^2 - 2xy = h^2$ und somit $(x + y)^2 - 2(x + y) - h^2 = 0$

Für $x + y = z$ ergibt dies $\mathbf{z^2 - 2z - h^2 = 0}$ und die Lösung $z = 1 + \sqrt{h^2 + 1}$ $(= xy = x + y)$

Wegen $x + y = z$ folgt aus $z = \dfrac{x^2}{x-1}$ die Gleichung $\mathbf{x^2 - zx + z = 0}$ und somit $x = \dfrac{z \pm \sqrt{z^2 - 4z}}{2}$

Zusammen ergibt sich die Formel

$$x = \frac{1 + \sqrt{h^2 + 1} + \sqrt{(1 + \sqrt{h^2+1})^2 - 4 \cdot (1 + \sqrt{h^2 + 1})}}{2}$$

d.

h. $$\mathbf{x = \frac{1 + \sqrt{h^2 + 1} + \sqrt{h^2 - 2\sqrt{h^2 + 1} - 2}}{2}}$$

Für h = 10m ergibt sich $z = 1 + \sqrt{101}$ und $x = \dfrac{1 + \sqrt{101} + \sqrt{98 - 2\sqrt{101}}}{2}$, ca. 9.938m

Für den Anstellwinkel gilt $\tan\alpha = \dfrac{x}{y} = x - 1$ und somit $\alpha = 83.61^{o}$.

Die zweite Lösung der quadratischen Gleichung ergibt $\mathbf{y} = \dfrac{\mathbf{1 + \sqrt{h^2 + 1} - \sqrt{h^2 - 2\sqrt{h^2 + 1} - 2}}}{\mathbf{2}}$

(alternative Wege: Symmetrieargument, $y = z - x$; $y = z/x$)

Ergänzungen zum Leiterproblem

Aus $x^2 + y^2 = h^2$ und $\frac{y}{x} = \frac{1}{x-1}$ folgt $1 + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{h^2}{x^2}$

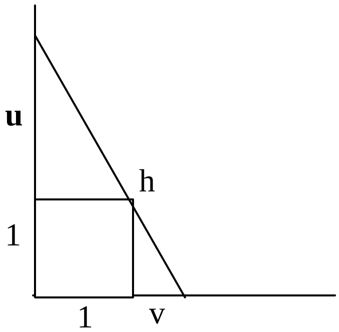
und damit $x^2(x-1)^2 + x^2 = h^2(x-1)^2$ oder $x^4 - 2x^3 + (2 - h^2)x^2 + 2h^2x + h^2 = 0$

aus der Substitution $x = u + 1$ ergibt sich dann $u^4 + 2u^3 + (2 - h^2)u^2 + 2u + 1 = 0$

Für $2 - h^2 = t$ ergibt sich die Gleichung $u^4 + 2u^3 + tu^2 + 2u + 1 = 0$

Diese Gleichung ist symmetrisch in den Koeffizienten. Daher ist mit jeder Zahl u_0 auch die Kehrzahl $1/u_0$ Lösung.

Sie wird durch einen alternativen Ansatz anschaulich.



Mit Pythagoras gilt $(u+1)^2 + (v+1)^2 = h^2$ und

mit Strahlensatz gilt $\frac{u+1}{v+1} = \frac{u}{1}$; (daraus folgt $u = \frac{1}{v}$)

Zusammen folgt $1 + \frac{1}{u^2} = \frac{h^2}{(u+1)^2}$ oder $u^4 + 2u^3 + (2-h^2)u^2 + 2u + 1 = 0$

Die minimale Länge der Leiter beträgt $h = 2\sqrt{2}$, (d.h. $u = v = 1$)

Dies ergibt die Ungleichung $2 - h^2 \leq -6$, d.h. die Gleichung $u^4 + 2u^3 + tu^2 + 2u + 1 = 0$ hat nur für $t \leq -6$ positive Lösungen.

Für h = $\mathbf{2\sqrt{2}}$ t d.h. $t = -6$ ergibt sich die Gleichung $u^4 + 2u^3 - 6u^2 + 2u + 1 = (u-1)^2 (u^2 + 4u + 1)$ mit den Lösungen $\{ 1, \sqrt{3} - 2, -\sqrt{3} - 2 \}$. Für $h = 0$, d.h. $t = 2$ ergeben sich aus der Gleichung die Lösungen $\{-1, i, -i\}$. Für $t > 2$ hat die Gleichung keine reellen Lösungen.