

Analysis

Gegeben ist die Funktion $f_t(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 - t}$, $t \neq 0$

- 1) Untersuche die Funktion f_t und zeichne ihr Schaubild.
- 2) In welchem Punkt S schneidet K_t die 1. Winkelhalbierende ?
- 3) Zeige: Fast alle K_t haben einen Punkt gemeinsam. Bestimme die Ausnahme.
- 4) Zeige: Das Verhalten von f für $x \rightarrow \infty$ ist von t unabhängig.
- 5) Zeige: Bei der Extremstellenbestimmung von f_t führt das Newtonverfahren auf die Formel $x_{i+1} = \frac{2}{3} f_t(x_i)$.
Bestimme damit die Extremstellen von K_1 auf 3 Nachkommastellen genau.
- 6) Gib die Gleichung der beiden Ortslinien für die Extrempunkte von K_t an.

Analytische Geometrie

Gegeben sind die 4 Raumpunkte $A(1/2/3)$, $B(-2/4/1)$, $C(1/3/3)$, $D(4/1/5)$

Zeige: Das Viereck ABCD ist ein Parallelogramm

Bestimme seinen Mittelpunkt M .

Gib die Strecke BC in vektorieller Schreibweise an.

Zeige, dass die Gerade (AC) die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ schneidet.

Auf welcher Geraden bewegt sich M , wenn das Viereck ABCD so in den Ursprung verschoben wird, dass D auf den Ursprung zu liegen kommt?

Lösungshinweise

Analysis

K_t hat nur für $t > 0$ senkrechte Asymptoten.

$$\frac{x^3 + 2}{x^2 - t} = x \quad \text{ergibt} \quad x = -\frac{2}{t} \quad \text{und somit} \quad S\left(-\frac{2}{t} / -\frac{2}{t}\right)$$

$$\text{Aus } f_t(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 - t} \quad \text{folgt } f(x) = 0 \text{ für } x = -\sqrt[3]{2} \quad \text{und } t \neq (-\sqrt[3]{2})^2 = \sqrt[3]{4}.$$

Für $t \neq \sqrt[3]{4}$ haben die Kurven den Punkt $N(-\sqrt[3]{2} / 0)$ gemeinsam.

$$\text{Polynomdivision ergibt } f_t(x) = x + \frac{tx + 2}{x^2 - 1}.$$

Der Bruchterm strebt unabhängig von t gegen Null. Somit ist die 1. Winkelhalbierende schräge Asymptote.

$$\text{Es gilt } f_t'(x) = \frac{x(x^3 - 3tx - 4)}{(x^2 - t)^2} \quad \text{Zur Extremstellenbestimmung sind u.a. die Nullstellen der}$$

Funktion $g(x) = x^3 - 3tx - 4$ aus dem Zähler der Ableitung von f_t zu berechnen.

$$\text{Das Verfahren von Newton führt auf den Iterationsterm} \quad x - \frac{x^3 - 3tx - 4}{3x^2 - 3t}.$$

$$\text{Dies kann zu } \frac{2x^3 + 4}{3x^2 - 3t} \text{ umgeformt werden. Also gilt } x_{i+1} = \frac{2}{3} \frac{x_i^3 + 2}{x_i^2 - t}, \text{ d.h. } x_{i+1} = \frac{2}{3} f(x_i)$$

$$\text{Es gilt: } f_t'(x) = \frac{x(x^3 - 3tx - 4)}{(x^2 - t)^2}. \quad \text{Es gilt } f(x) = 0 \text{ für } x = 0.$$

Da für $f(x)$ an der Stelle 0 das Vorzeichen wechselt, ist die y -Achse eine Ortslinie der Extrempunkte.

$$\text{Die zweite Ortslinie ergibt sich aus der Formel } y = \frac{Z'(x)}{N'(x)}, \text{ da } Z'(x) \text{ und } N'(x) \text{ von } t \text{ unabhängig}$$

sind. Dies ergibt als Ortslinie die Gerade mit der Gleichung $y = 1.5x$.

Geometrie

$$\overline{BC} = \overline{AD} ; \quad \vec{m} = \vec{OM} = 0.5 \cdot (\vec{a} + \vec{c}), \text{ d.h. } M(1/2.5/3)$$

$$\overline{BC}: \quad \vec{x} = \vec{b} + t \cdot \overline{BC}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \text{d.h. } \overline{BC}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{ergibt } s = -5 \text{ u. } t = -3, \text{ d.h. } S(1/-3/3); \quad \text{h: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$